

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Unter Mitarbeit von

H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner
E. Kramar, A. Mehli, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann
M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, R. Theile, F. Tank, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von

KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung:

J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma

Geschäftsführende Redaktion:

F. Rühmann

BAND 15

AUGUST 1961

HEFT 8

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

KWR

**Trägerfrequenzkabel
KABELWERK RHEYDT AKT.-GES.**

RHEYDT (RHLD.)

INHALT

Originalmitteilungen:	Seite
Über die Wellenausbreitung im Ringsektorhohlleiter . . . von K.-B. Niclas	347
Über die kleinsten meßbaren Temperaturänderungen . . . von M. J. O. Strutt	355
Neue Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen . . . von G.-G. Gaßmann	359
Die Aufspaltung des elektrokinetischen Leistungstheorems von W. Riedler	377
Die H_{01} -Welle im runden Hohlleiter mit ideal leitender, rauhem Wand von R. Willett	386
Buchbesprechungen	354, 358, 391

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Schriftleitung:

Dr. phil. J. Piesch

Wien IV/50, Karlsplatz 13, Fernruf U 46530

Dr.-Ing. J. Schunack,

Berlin-Lichterfelde 1, Drakestraße 1a, Fernruf 73 22 61

Prof. Dr.-Ing. E. h. Dr. techn. M. Strutt,
Zürich 7, Gloriosastraße 35, Fernruf 32 73 30

Oberstudiendirektor Dr. phil. A. Thoma,
Fulda, Heinrich-von-Bibra-Platz 1,
Fernruf (vorm.) 29 62, (nachm.) 44 28

Geschäftsführende Redaktion und Anzeigenverwaltung:

Ing. Friedrich Rühmann

(17a) Karlsruhe-Durlach, Machstraße 4, Fernruf 4 28 54

Alle Zuschriften werden entweder an die Schriftleitung oder
an die Geschäftsführende Redaktion erbeten.

Geschäftliche Hinweise:

Der Bezug des Archivs der elektrischen Übertragung
durch Verlag, Post und Buchhandel ist im Abonnement
zum Preis von DM 20,— für das Vierteljahr möglich.
Einzelhefte können zum Preis von DM 7,— geliefert
werden.

Anzeigenaufträge und -anfragen bitten wir an die
Anzeigenverwaltung der Zeitschrift zu richten.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

Postscheckkonto Stuttgart 64383

LAUFFELDRÖHREN

Von Prof. Dr. Werner Kleen und Dr. Klaus Pöschl

X, 192 Seiten mit 127 Bildern, 16 cm × 23 cm,
Ganzleinen DM 28,—

Teil 2 der

EINFÜHRUNG IN DIE MIKROWELLEN-ELEKTRONIK

Von Prof. Dr. Werner Kleen

Früher erschien:

Teil 1: Physikalische und technische Grundlagen

320 Seiten, 129 Bilder, 16 cm × 23 cm,
Ganzleinen DM 28,—

Inhaltsübersicht zu Teil 2:

A. Wanderfeldröhre

1. Qualitative Übersicht
2. Lineare Vorgänge
3. Rauschen
4. Nichtlineare Vorgänge
5. Bemessung, Daten und Anwendungen von Wanderfeldröhren

B. Sonstige Lauffeldröhren

6. Rückwärtswellenröhre
7. Elektronenwellenröhre
8. Lauffeldröhre mit Widerstandsschicht
9. Spezielle Formen von Lauffeldröhren und verwandte Effekte

Anhänge

Die Verfasser sind von dem Gesichtspunkt ausgegangen, hier jene Erscheinungen in Lauffeldröhren zu behandeln, die sie auf Grund eigener Erfahrungen im Laboratorium als wesentlich ansahen. Die Erscheinungen in technisch wichtigen Röhrenarten sind eingehender, die Effekte und Röhrenformen mit bisher lediglich physikalischem Interesse sind kürzer, z. T. nur qualitativ, beschrieben. Die Auswahl des Stoffes soll den vorhandenen Bedürfnissen des Physikers und Ingenieurs, der an der Entwicklung und Fertigung von Lauffeldröhren arbeitet, entsprechen. Dieser Teil 2 enthält auch einen kurzen Anhang, der den im Dezember 1952 erschienenen Teil 1 ergänzt. Teil 1 bildet für viele Abschnitte des Teiles 2 die Grundlage.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

ARCHIV

DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG (A.E.Ü.)

Unter Mitarbeit von H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner, E. Kramar, A. Mehli, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann, M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, F. Tank, R. Theile, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung: J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma / Geschäftsführende Redaktion: F. Rühmann
S. HIRZEL VERLAG, Stuttgart

Band 15

August 1961

Heft 8

Über die Wellenausbreitung im Ringsektorhohlleiter

VON KARL-B. NICLAS

Mitteilung aus dem Röhrenlaboratorium der Telefunken GmbH, Ulm (Donau)

(A.E.Ü. 15 [1961], 347–354; eingegangen am 20. März 1961)

DK 621.372.829:621.385.6

Der Ringsektorhohlleiter kann mit Erfolg als Ankoppelement für Wanderfeldröhren verwendet werden.

Ausgehend von diesem Anwendungsbeispiel werden die elektromagnetischen Feldkomponenten des Ringsektorhohlleiters berechnet und die Felddiagramme der einfachsten Wellentypen schematisch aufgezeichnet. Die Grenzwavelengthen für die elektrische und magnetische Grundwelle werden bestimmt und in einem Diagramm als Funktion der Abmessungen dargestellt. Nach Angabe der Wandströme, der maximalen Spannung und der transportierten Leistung für den H_{11} -Wellentyp wird der aus Strom und Spannung definierte Wellenwiderstand des Ringsektorhohlleiters berechnet.

The ring-sector waveguide is a successful coupling element for traveling-wave tubes.

After some remarks about this example of application the electromagnetic field components of the ring-sector waveguide are calculated. The field distribution of the fundamental modes is given schematically. The cutoff wavelengths for the E_{11} and H_{11} modes are calculated and shown in a diagram as a function of the dimensions. After stating the wall currents, the maximum voltage and the transmitted power for the H_{11} mode, the characteristic impedance of the ring-sector waveguide is calculated as defined by voltage and current.

1. Einleitung

Bei der Ankopplung von Wanderfeldröhren taucht oft das Problem auf, wie die Hochfrequenzleistung an den Röhreneingang und an den -ausgang herangebracht werden kann, ohne daß der die Röhre umgebende Fokussierungsmagnet unterbrochen wird. Dieses gilt besonders für Gleichfeldfokussierung mit tonnenförmigem Permanentmagneten, da bekanntlich jede Unterbrechung des Tonnenmagneten in radialer Richtung eine unzulässig hohe Querkomponente des Magnetfeldes mit sich bringt, die eine gute Strahlführung verhindert.

Aus konstruktiven Gründen bietet sich hier eine Koaxialleitung an, in deren Innenleiter die Wanderfeldröhre eingeführt wird. Diese Lösung bereitet aber immer dann Schwierigkeiten, wenn der mittlere Umfang der konzentrischen Leitung die Wellenlänge der übertragenen Leistung erreicht und überschreitet. In diesem Fall können neben der üblichen Lecherwelle noch Hohlleiterwellen auftreten, so daß die Gefahr einer Interferenz zwischen den Wellentypen besteht. Hier kann der Ringsektorhohlleiter, im folgenden auch Ringsektorleiter genannt, mit Erfolg zur Ankopplung verwendet werden [1].

In Bild 1 ist das Ankoppelsystem einer Wanderfeldröhre, deren Elektronenstrahl durch das Feld eines Tonnenmagneten geführt wird, mit Ring-

sektorleiter dargestellt. Er hat die Form eines konzentrischen Kabels, in das in radialer Richtung zwei leitende Wände eingeführt worden sind. Auf diese Weise entsteht ein Hohlleiter, der die Röhre in Umfangsrichtung teilweise umfaßt.

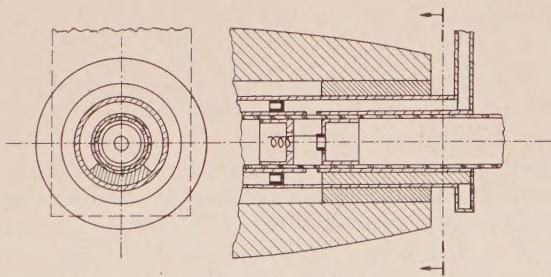


Bild 1. Schematische Darstellung einer Ankopplung für Wanderfeldröhren mit Ringsektorleiter.

Im Gegensatz zu einer Koaxialleitung mit gleichem Außen- und Innenradius wie beim Ringsektorleiter besitzt dieser den wesentlichen Vorteil, daß sich in ihm nur E - und H -Wellen, aber keine Wellen vom Lechertyp fortpflanzen können. Damit besteht keine Gefahr der Interferenz zwischen Lecher- und Hohlleiterwellen. Außerdem ist der Wellenwiderstand des Ringsektorleiters größer als der einer

Koaxialleitung mit gleichen Radien. Für gleichen Wellenwiderstand der Leitungen werden daher die Außenabmessungen des Ringsektorleiters kleiner als die der Koaxialleitung sein, sofern die Innenradien übereinstimmen.

Wegen seiner Querschnittsform kann man sich den Ringsektorleiter aber auch dadurch entstanden denken, daß ein Rechteckhohlleiter über seine Breitseite kreisförmig gebogen worden ist. Ein Vergleich beider Wellenleiter hinsichtlich ihrer elektrischen Eigenschaften ist aber nur näherungsweise gültig. So treten im Ringsektorleiter sowohl bei den E - als auch bei den H -Wellen die beiden transversalen Feldkomponenten immer gemeinsam auf. In ihm sind weder der E_{01} - noch der H_{01} -Wellentyp fortpflanzungsfähig.

Im folgenden sollen nun die Feldkomponenten der E - und H -Wellen sowie einige charakteristische Größen des Ringsektorleiters berechnet werden.

2. Die Berechnung der Feldkomponenten und der Wandstromdichten

Zur Vereinfachung der folgenden Untersuchungen werden die Hohlleiterwände als vollkommen leitend angesehen. Für den versilberten Hohlleiter ist diese Annahme in dem hier interessierenden Frequenzbereich zur Berechnung der Feldverteilung im Rohrrinneren durchaus zulässig. Physikalisch besagt die als unendlich groß vorausgesetzte Leitfähigkeit, daß das elektromagnetische Feld nicht in das Innere des Rohrmantels eindringt.

Bild 2 zeigt den Querschnitt des Ringsektorleiters, der durch die Radien a und b sowie durch den Sektorwinkel α vollständig bestimmt ist. Es handelt sich um eine einfach zusammenhängende Querschnittsfläche mit der Berandung Γ , in der sich nur Hohlleiterwellen fortpflanzen können.

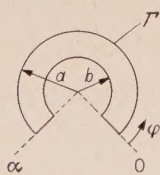


Bild 2. Querschnitt des Ringsektorhohlleiters.

Bekanntlich existieren in einem Hohlleiter Wellen vom elektrischen Typ (E -Wellen) und Wellen vom magnetischen Typ (H -Wellen). E -Wellen besitzen außer transversalen Feldkomponenten auch eine longitudinale elektrische Feldstärke, aber keine longitudinale magnetische Feldstärke. Umgekehrt haben H -Wellen eine longitudinale magnetische, aber keine longitudinale elektrische Feldstärke. Entsprechend dieser Einteilung werden wir bei der mathematischen Behandlung des Problems zwischen Wellen vom E - und H -Typ zu trennen haben.

Wie in [2] ausführlicher beschrieben, lassen sich die Wellengleichungen durch die Ansätze

$$E(u, v, z) = g(u, v) \exp(-j\beta z) \quad (1a)$$

$$\text{und } H(u, v, z) = f(u, v) \exp(-j\beta z) \quad (1b)$$

lösen und führen auf die Differentialgleichungen

$$\Delta g_z + \gamma^2 g_z = 0 \quad (2a)$$

$$\text{und } \Delta f_z + \gamma^2 f_z = 0. \quad (2b)$$

Zusammen mit den Randbedingungen

$$g_z = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (3a)$$

$$\text{und } \partial f_z / \partial n = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3b)$$

worin n die Koordinate in Normalenrichtung bedeutet, liefern die Gl. (2) eine unendliche Anzahl von Eigenlösungen. Darin sind die Eigenwerte γ durch

$$\gamma^2 = \beta_0^2 - \beta^2 \quad (4)$$

mit der Fortpflanzungskonstante im Hohlleiter β und der im Vakuum $\beta_0 = \omega/c$ verknüpft. Um die Feldkomponenten zu berechnen, müssen also die Eigenlösungen der beiden Randwertaufgaben (2a) mit (3a) und (2b) mit (3b) für den Ringsektorleiter gefunden werden. Da es sich in unserem Fall um ein zylindrisches Problem handelt, ist es zweckmäßig, Zylinderkoordinaten einzuführen.

Bei Anwendung des Δ -Operators in Zylinderkoordinaten auf die Gl. (2) erhält man die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \begin{pmatrix} g_z \\ f_z \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} g_z \\ f_z \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \begin{pmatrix} g_z \\ f_z \end{pmatrix} + \gamma^2 \begin{pmatrix} g_z \\ f_z \end{pmatrix} = 0, \quad (5a)$$

$$\text{denen die Lösungsansätze} \quad (5b)$$

$$\begin{pmatrix} g_z(r, \varphi) \\ f_z(r, \varphi) \end{pmatrix} = [C_1 J_p(\gamma r) + C_2 N_p(\gamma r)] \cos[p(\varphi - \varphi_{mn})] \quad (6a)$$

$$(6b)$$

genügen.

Die Größen C_1 , C_2 und der Winkel φ_{mn} sind Konstanten, die aus den Randbedingungen bestimmt werden müssen. Dasselbe gilt auch für den Index p der Besselschen und Neumannschen Funktionen sowie für den Eigenwert γ .

Die Lösungen (6) bilden nun den Ausgangspunkt aller weiteren Berechnungen.

E -Wellen (TM -Wellen)

Für den Ringsektorleiter in Bild 2 gelten gemäß Gl. (3a) die Randbedingungen

$$g_z = 0 \quad \text{für} \quad \begin{cases} \varphi = 0, & b \leq r \leq a \\ \varphi = \alpha, & b \leq r \leq a \end{cases} \quad (7a)$$

$$\begin{cases} r = a, & 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ r = b, & 0 \leq \varphi \leq \alpha \end{cases} \quad (7b)$$

Sie machen die physikalische Aussage, daß die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf der Berandung verschwindet, da wir diese als unendlich gut leitend angenommen haben.

Durch Anwenden der Grenzbedingungen (7a) auf Gl. (6a) findet man den Index

$$p = m\pi/\alpha \quad (8)$$

der Zylinderfunktionen sowie den Winkel

$$\varphi_{mn} = \alpha/2m. \quad (9)$$

m ist ganzzahlig positiv ($m = 1, 2, \dots$) und gibt die Anzahl der Maxima für die radiale Komponente der

elektrischen Feldstärke über dem Umfang an. Da die Randbedingungen Gl. (7a) in azimuthaler Richtung einen periodischen Verlauf von $g_z(r, \varphi)$ verlangen, tritt der Fall $m = 0$ nicht auf.

Für beliebige Werte φ erhält man durch Einsetzen der Grenzbedingungen (7b) in Gl. (6a) das Konstantenverhältnis¹

$$-\frac{C_2}{C_1} = \frac{J_{m\pi/\alpha}(\gamma_E a)}{N_{m\pi/\alpha}(\gamma_E a)} = \frac{J_{m\pi/\alpha}(\gamma_E b)}{N_{m\pi/\alpha}(\gamma_E b)} = \delta_E. \quad (10)$$

Darüberhinaus liefert uns Gl. (10) noch die Eigenwerte $\gamma_{E, mn}$, da die Koeffizientendeterminante

$$J_{m\pi/\alpha}(\gamma_E a) N_{m\pi/\alpha}(\gamma_E b) - J_{m\pi/\alpha}(\gamma_E b) N_{m\pi/\alpha}(\gamma_E a) = 0 \quad (11)$$

wird. Man findet eine unbegrenzte Anzahl ($n = 1, 2, 3, \dots$) Wurzeln dieser Kombination von Besselschen und Neumannschen Funktionen, die alle positiv reell sind. Sie gehören zu den E_{mn} -Wellentypen.

Da wir mit Hilfe der Randbedingungen (Gl. (7)) bis auf die freie Konstante $C_E = C_1$ alle Konstanten bestimmt haben, können jetzt mit den Eigenfunktionen

$$g_{z, mn}(r, \varphi) = C_E [J_{m\pi/\alpha}(\gamma_E, mn r) - \delta_E N_{m\pi/\alpha}(\gamma_E, mn r) \sin(\varphi m \pi / \alpha)] \quad (12)$$

die Feldkomponenten der E_{mn} -Wellen angegeben werden.

Wie in [2] ausführlich abgeleitet, findet man für E -Wellen folgenden Zusammenhang zwischen der Eigenfunktion g_z und den elektromagnetischen Feldkomponenten:²

$$E = \left(-j \frac{\beta_E}{\gamma_E^2} \text{grad}_{tr} g_z + g_z e_z \right) \exp(-j \beta_E z), \quad (13a)$$

$$H = j \frac{\omega \varepsilon}{\gamma_E^2} \text{rot}(g_z e_z) \exp(-j \beta_E z). \quad (13b)$$

Das negative Vorzeichen im Exponenten der Gl. (13) gibt an, daß sich die Wellen in positiver z -Richtung fortpflanzen.

Durch Einsetzen der Eigenfunktion (Gl. (12)) in die Gl. (13) erhalten wir unter Berücksichtigung, daß $Z'(\gamma_E r)$ die Ableitung der Zylinderfunktion

$$Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) = J_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) - \delta_E N_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) \quad (14)$$

nach dem Argument $\gamma_E r$ bedeutet, die elektromagnetischen Feldkomponenten

¹ Der Index E soll ausdrücken, daß es sich hier um die Eigenwerte der Wellen vom E -Typ handelt.

² Bei der Angabe der Feldkomponenten der E_{mn} -Wellen ist wegen der komplizierten Schreibweise auf die Mitführung des Indexes mn verzichtet worden.

$\text{grad}_{tr} g_z$ ist die Transversalkomponente des Gradienten von g_z . Der Einheitsvektor in z -Richtung ist mit e_z bezeichnet.

$$E_r = -j C_E \frac{\beta_E}{\gamma_E} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) \sin\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_E z), \quad (15a)$$

$$E_\varphi = -j C_E \frac{\beta_E}{\gamma_E^2} \frac{m \pi}{\alpha} \frac{1}{r} Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) \cos\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_E z), \quad (15b)$$

$$E_z = C_E Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) \sin\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_E z), \quad (15c)$$

$$H_r = j C_E \frac{\omega \varepsilon}{\gamma_E^2} \frac{m \pi}{\alpha} \frac{1}{r} Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) \cos\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_E z), \quad (15d)$$

$$H_\varphi = -j C_E \frac{\omega \varepsilon}{\gamma_E} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) \sin\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_E z), \quad (15e)$$

$$H_z = 0. \quad (15f)$$

Die Lösungen (15) setzen sich aus dem Produkt zweier Funktionen zusammen, wobei die Zylinderfunktionen periodisch in r , die trigonometrischen Funktionen periodisch in φ sind. Da m die Anzahl der E_r -Maxima in φ -Richtung angibt und n die n -te Wurzel der Koeffizientendeterminante Gl. (11) ist, geben die Zahlen m und n gleichzeitig die Indizes der E_{mn} -Wellen an. In Bild 3 sind beispielsweise die Feldverteilungen des E_{11} - und des E_{21} -Wellentyps im Ringsektorleiter in den Ebenen $z = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ schematisch aufgezeichnet. Sie haben große Ähnlichkeit mit den Feldbildern der entsprechenden Wellentypen in einer Koaxialleitung [3].

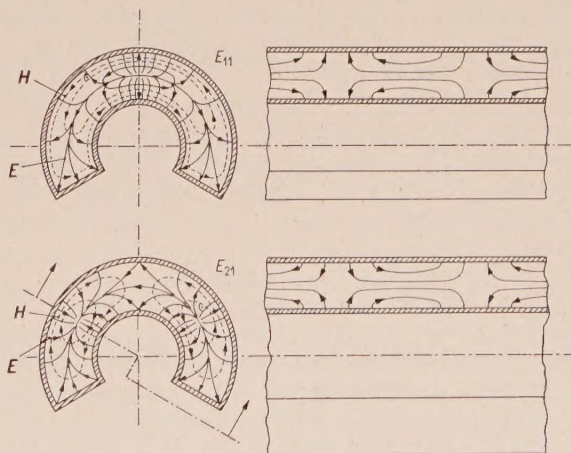


Bild 3. Schematische Darstellung der Feldverteilung des E_{11} - und des E_{21} -Wellentyps im Ringsektorhohlleiter.

Sind die Magnetfeldkomponenten bekannt, so können die Komponenten der Flächenstromdichten mit

$$S = e_n \times H \quad (16)$$

bestimmt werden³.

Wählt man den in Bild 4 angegebenen Richtungssinn der Einheitsvektoren, so findet man auf dem Außenleiter des Ringsektorleiters mit $e_n = -e_r$

³ e_n ist der Einheitsvektor in Normalenrichtung. Er soll voraussetzungsgemäß aus der Metalloberfläche herausweisen.

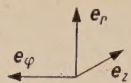


Bild 4. Richtungssinn der Einheitsvektoren.

die Flächenstromdichte

$$S_E(\varphi, a, z) = -j C_E \frac{\omega \varepsilon}{\gamma_E} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_E a) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j\beta_E z) e_z \quad (17a)$$

und auf dem Innenleiter mit $e_n = e_r$ die Flächenstromdichte

$$S_E(\varphi, b, z) = j C_E \frac{\omega \varepsilon}{\gamma_E} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_E b) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j\beta_E z) e_z. \quad (17b)$$

Zusätzlich fließen aber noch Ströme auf beiden Radialwänden in z -Richtung. Addiert man die auf beiden Wänden für den gemeinsamen Radius r vorhandenen Wandstromdichten, so erhält man

$$S_E(r, z) = S_E(0, r, z) + S_E(\alpha, r, z) = j C_E [1 - (-1)^m] \frac{\omega \varepsilon}{\gamma_E^2} \frac{m\pi}{\alpha} \frac{1}{r} Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_E r) \cdot \exp(-j\beta_E z) e_z. \quad (17c)$$

Wie man sieht, existiert über dem gesamten Querschnittsrand Γ des Ringsektorleiters für Wellen vom E_{mn} -Typ eine Flächenstromdichte nur in z -Richtung. Für die in Bild 3 als Beispiel dargestellte E_{11} -Welle fließen die Wandströme in einer beliebigen Querschnittsebene nur in positiver oder nur in negativer z -Richtung. Die auf den beiden Radialwänden vorhandenen Wandströme haben die gleichen Beträge.

H-Wellen (TE-Wellen)

Wie wir noch im nächsten Abschnitt bei der Berechnung der Grenzwellenlängen im Ringsektorleiter sehen werden, haben die H-Wellen für die praktische Anwendung vor den oben behandelten E-Wellen die weitaus größere Bedeutung.

Mit Gl. (3b) lauten hier die für den in Bild 2 dargestellten Hohlleiterquerschnitt gültigen Randbedingungen

$$\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} = 0 \quad \begin{cases} \varphi = 0, & b \leq r \leq a, \\ \varphi = \alpha, & b \leq r \leq a, \end{cases} \quad (18a)$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial r} = 0 \quad \begin{cases} r = b, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\ r = a, & 0 \leq \varphi \leq \alpha. \end{cases} \quad (18b)$$

Sie drücken aus, daß die Normalenkomponente der magnetischen Feldstärke nicht in die Leiteroberfläche eindringt.

Durch Einsetzen der Grenzbedingungen (18a) in den Lösungsansatz (6b) erhält man denselben Index der Zylinderfunktionen wie im Fall der E-Wellen

$$p = m\pi/\alpha. \quad (19)$$

Im Gegensatz zu Gl. (9) findet man für den Winkel der H-Wellen

$$\varphi_{mn} = 0. \quad (20)$$

Auch hier tritt wegen der Forderung, daß $f_z(r, \varphi)$ in azimuthaler Richtung periodisch verlaufen muß, der Fall $m = 0$ nicht auf.

Weiterhin findet man mit Hilfe der Grenzbedingungen (18b) das Konstantenverhältnis⁴

$$-\frac{C_2}{C_1} = \frac{J'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H a)}{N'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H a)} = \frac{J'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H b)}{N'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H b)} = \delta_H. \quad (21)$$

Gl. (21) entnehmen wir die Koeffizientendeterminante

$$J'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H a) N'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H b) - J'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H b) N'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H a) = 0, \quad (22)$$

deren Wurzeln $\gamma_{H, mn} b$ die Eigenwerte $\gamma_{H, mn}$ liefern. Sie sind alle positiv und reell.

Mit den Gl. (19) bis (21) kennen wir jetzt die Eigenfunktionen

$$f_{z, mn}(r, \varphi) = C_H [J_{m\pi/\alpha}(\gamma_{H, mn} r) - \delta_H N_{m\pi/\alpha}(\gamma_{H, mn} r)] \cos\left(\frac{m\pi}{\alpha} \varphi\right) \quad (23)$$

der H_{mn} -Wellen, deren Feldkomponenten mit⁵

$$H = \left(-j \frac{\beta_H}{\gamma_H} \text{grad}_{\text{tr}} f_z + f_z e_z\right) \exp(-j\beta_H z), \quad (24a)$$

$$E = -j \frac{\omega \mu}{\gamma_H^2} \text{rot}(f_z e_z) \exp(-j\beta_H z) \quad (24b)$$

berechnet werden können [2].

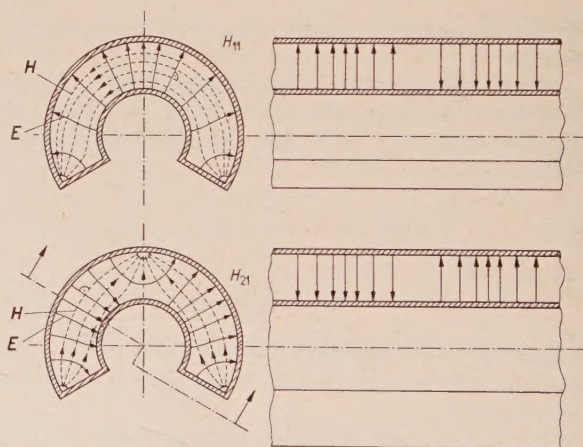


Bild 5. Schematische Darstellung der Feldverteilung des H_{11} - und des H_{21} -Wellentyps im Ringsektorhohlleiter.

Auch hier ist das Vorzeichen des Exponenten so gewählt, daß die Wellen in positiver z -Richtung fortschreiten.

Ist $Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r)$ die Ableitung der Zylinderfunktion

⁴ Der Index H soll ausdrücken, daß es sich hier um die Eigenwerte der Wellen vom H -Typ handelt.

⁵ Bei der Angabe der Feldkomponenten für die H_{mn} -Wellen wird auf die Mitführung des Indexes mn verzichtet.

$$Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) = J_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) - \delta_H N_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \quad (25)$$

nach ihrem Argument $\gamma_H r$, so lauten die Komponenten des elektromagnetischen Feldes

$$E_r = j C_H \frac{\omega \mu}{\gamma_H^2} \frac{m \pi}{\alpha} \frac{1}{r} Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \sin\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_H z), \quad (26a)$$

$$E_\varphi = j C_H \frac{\omega \mu}{\gamma_H} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \cos\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_H z), \quad (26b)$$

$$E_z = 0, \quad (26c)$$

$$H_r = -j C_H \frac{\beta_H}{\gamma_H} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \cos\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_H z), \quad (26d)$$

$$H_\varphi = j C_H \frac{\beta_H}{\gamma_H^2} \frac{m \pi}{\alpha} \frac{1}{r} Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \sin\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_H z), \quad (26e)$$

$$H_z = C_H Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \cos\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \exp(-j \beta_H z). \quad (26f)$$

Da für H_{mn} -Wellen im Gegensatz zu den E_{mn} -Wellen keine Longitudinalkomponente der elektrischen Feldstärke E_z existiert, heben sich die Wandströme gemäß

$$\int_\Gamma S_z ds = 0 \quad (28)$$

in beiden z -Richtungen gegenseitig auf. Mit s ist die Bogenlänge der Querschnittsberandung Γ gemeint. Ein weiterer gegenüber den E -Wellen charakteristischer Unterschied ist das Vorhandensein von Wandströmen in azimuthaler und in radialer Richtung.

Die Berechnung der elektromagnetischen Feldkomponenten und der Wandstromdichten im Ringsektorleiter führt, wie wir gesehen haben, auf Lösungen, die das Produkt aus einer Zylinder-

Bezüglich der Indizes m und n gilt für H_{mn} -Wellen das schon für E_{mn} -Wellen Gesagte.

Als Beispiel sind in Bild 5 die Feldverteilungen des H_{11} - und des H_{21} -Wellentyps im Ringsektorleiter in den Ebenen $z = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ schematisch dargestellt. Auch hier besteht, ebenso wie bei den E_{mn} -Wellen, die große Ähnlichkeit zu den Feldbildern der entsprechenden Wellentypen in einer Koaxialleitung [3].

Nachdem die elektromagnetischen Feldkomponenten der H_{mn} -Wellen bekannt sind, können mit Gl. (16) auch die Wandstromdichten berechnet werden. Dabei wird im folgenden der in Bild 4 angegebene Richtungssinn der Einheitsvektoren zugrundegelegt.

Man erkennt sofort, daß die für H -Wellen charakteristische Komponente der magnetischen Feldstärke in Ausbreitungsrichtung der Wellen (positive z -Richtung) auf der Wand des Ringsektorleiters sowohl Ströme in azimuthaler als auch solche in radialer Richtung erzeugt.

Auf dem Außenleiter, dem Innenleiter und den beiden Hohlleiterwänden in radialer Richtung findet man die nachstehenden Vektoren der Flächenstromdichte:

a) Außenleiter

$$S_H(\varphi, a, z) = -C_H Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H a) \left[\cos\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \mathbf{e}_\varphi - j \frac{\beta_H}{\gamma_H^2} \frac{m \pi}{\alpha} \frac{1}{a} \sin\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \mathbf{e}_z \right] \exp(-j \beta_H z), \quad (27a)$$

b) Innenleiter

$$S_H(\varphi, b, z) = C_H Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H b) \left[\cos\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \mathbf{e}_\varphi - j \frac{\beta_H}{\gamma_H^2} \frac{m \pi}{\alpha} \frac{1}{b} \sin\left(\frac{m \pi}{\alpha} \varphi\right) \mathbf{e}_z \right] \exp(-j \beta_H z), \quad (27b)$$

c) rechte Radialwand

$$S_H(0, r, z) = -C_H \left[Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \mathbf{e}_r + j \frac{\beta_H}{\gamma_H} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \mathbf{e}_z \right] \exp(-j \beta_H z), \quad (27c)$$

d) linke Radialwand

$$S_H(\alpha, r, z) = (-1)^m C_H \left[Z_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \mathbf{e}_r + j \frac{\beta_H}{\gamma_H} Z'_{m\pi/\alpha}(\gamma_H r) \mathbf{e}_z \right] \exp(-j \beta_H z). \quad (27d)$$

funktion und einer trigonometrischen Funktion enthalten. Da der Index der Zylinderfunktionen für beliebige Sektorwinkel α alle nichtganzzahligen Werte $1/2 \leq p \leq \infty$ annehmen kann, ist die zahlenmäßige Auswertung der aufgestellten Lösungen wegen fehlender Tabellenwerte allgemein sehr schwierig. Hier wird oft nur eine Näherungslösung zum Erfolg führen.

Praktische Bedeutung hat der Ringsektorleiter in erster Linie nur für die Grundwellen ($m = 1$) und für Sektorwinkel $\alpha \geq \pi/2$, so daß als Index der Zylinderfunktionen $Z_p(\gamma r)$ maximal der Wert $p = 2$ auftritt.

Zum groben qualitativen Verständnis der Wellenausbreitung im Ringsektorleiter kann man sich dadurch helfen, daß man sich den Ringsektorleiter durch Biegung aus einem entsprechenden Rechteckhohlleiter entstanden denkt. Bei dieser mechanischen Verformung vermögen aber die elektromagnetischen Feldlinien eines Rechteckhohlleiters der geometrischen Verformung der Hohlleiterwände nicht exakt zu folgen. Darüber hinaus werden die Wellenindizes beider Hohlleiterquerschnitte im allgemeinen nicht mehr übereinstimmen. So besitzt z. B. der H_{10} -Typ im Rechteckhohlleiter gewisse

Ähnlichkeit mit dem in Bild 5 dargestellten H_{11} -Typ im Ringsektorleiter. Während aber bei der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter nur eine y -Komponente der elektrischen sowie eine x - und eine z -Komponente der magnetischen Feldstärke vorhanden sind, besitzt die H_{11} -Welle im Ringsektorleiter außer der Longitudinalkomponente des elektrischen Feldes alle weiteren elektromagnetischen Feldkomponenten.

Sowohl bei den Wellen vom E -Typ als auch bei denen vom H -Typ treten im Ringsektorleiter die beiden transversalen Feldkomponenten immer gemeinsam auf. In ihm sind weder die E_{01} -Welle noch die H_{01} -Welle fortpflanzungsfähig.

3. Die Grenzwellenlänge der Grundwellen

Die Grenzwellenlängen λ_c von Hohlleiterwellen werden ganz allgemein mit Hilfe der Eigenwerte γ_{mn} bestimmt:

$$\lambda_{c,mn} = \frac{2\pi}{\gamma_{mn}} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}. \quad (29)$$

ϵ_r ist die relative Dielektrizitätskonstante und μ_r die relative Permeabilität des Dielektrikums im Hohlleiter. Mit Vakuum als Dielektrikum wird der Wurzelausdruck in Gl. (29) zu $\sqrt{\epsilon_r \mu_r} = 1$.

Bei der zahlenmäßigen Auswertung der Koeffizientendeterminanten Gl. (11) und (22) zur Bestimmung der Eigenwerte γ_{mn} wollen wir uns im folgenden auf die Grundwellentypen ($m = 1, n = 1$) beschränken, da diesen in erster Linie eine praktische Bedeutung zukommt.

Zu diesem Zweck müssen die Wurzeln

$$\gamma_{11} b = x_{11} \quad \text{und} \quad \gamma_{11} a = k x_{11} \quad (30a, b)$$

$$\text{mit} \quad k = a/b \quad (31)$$

der transzendenten Gl. (11) und (22) gefunden werden.

E_{11} -Welle

Mit den Gl. (30) und (31) lautet die Koeffizientendeterminante Gl. (11) für $m = 1$:

$$J_{\pi/\alpha}(k x_{E_{11}}) N_{\pi/\alpha}(x_{E_{11}}) - J_{\pi/\alpha}(x_{E_{11}}) N_{\pi/\alpha}(k x_{E_{11}}) = 0. \quad (32)$$

Im interessierenden Bereich des Sektorwinkels $\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$ und des Radienverhältnisses $1 < a/b \leq 3$ findet man in guter Näherung für die Grenzwellenlänge des E_{11} -Wellentyps in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen des Ringsektorleiters die einfache Beziehung⁶

$$\lambda_{c,E_{11}} \approx 2(a-b) \quad (33)$$

in Analogie zum Rechteckhohlleiter.

Der genaue Wert der Grenzwellenlänge kann aus den Gl. (29) und (32) berechnet werden. Der Quotient

$$\frac{\lambda_{c,E_{11}}}{2(a-b)} = \frac{\pi}{(k-1)x_{E_{11}}} \quad (34)$$

ist in Bild 6 dargestellt. Dieses Diagramm gibt gleichzeitig den prozentualen Fehler an, den man

⁶ Hier und im weiteren Verlauf soll das Dielektrikum im Hohlleiter durch $\epsilon_r = 1$ und $\mu_r = 1$ charakterisiert werden.

bei der Benutzung der Näherungslösung Gl. (33) macht. Wie man sieht, ist er innerhalb der eingangs gewählten Grenzen niemals größer als 16%.

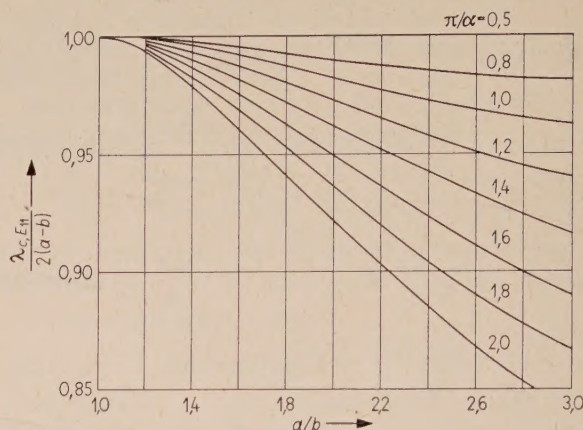


Bild 6. Diagramm zur Bestimmung der Grenzwellenlänge des E_{11} -Wellentyps im Ringsektorhohlleiter.

H_{11} -Welle

Hier müssen zur Bestimmung der Eigenwerte $\gamma_{H_{11}}$ die Wurzeln $x_{H_{11}}$ der Koeffizientendeterminante

$$J'_{\pi/\alpha}(k x_{H_{11}}) N'_{\pi/\alpha}(x'_{H_{11}}) - J'_{\pi/\alpha}(x_{H_{11}}) N'_{\pi/\alpha}(k x_{H_{11}}) = 0 \quad (35)$$

gefunden werden.

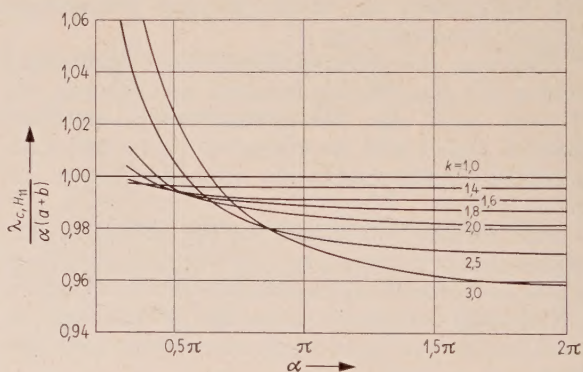


Bild 7. Diagramm zur Bestimmung der Grenzwellenlänge des H_{11} -Wellentyps im Ringsektorhohlleiter.

In Bild 7 ist der Verlauf der Funktion

$$\frac{\lambda_{c,H_{11}}}{\alpha(a+b)} = \frac{2\pi}{\alpha(k+1)x_{H_{11}}} \quad (36)$$

in Abhängigkeit vom Sektorwinkel α mit dem Radienverhältnis k als Parameter in den Grenzen $\pi/3 \leq \alpha \leq 2\pi$ und $1 < a/b \leq 3$ dargestellt⁷. Für den Sektorwinkel $\alpha \geq \pi/2$ erhält man aus Gl. (36) die sehr gute Näherungsbeziehung

$$\lambda_{c,H_{11}} \approx \alpha(a+b) \quad (37)$$

für die Grenzwellenlänge des H_{11} -Wellentyps.

Vergleicht man die Grenzwellenlänge der beiden Grundwellen Gl. (34) und (36), so erkennt man die Bedeutung der H_{11} - vor der E_{11} -Welle. Im inter-

⁷ Die in Bild 7 angegebenen Kurven sind wegen tabellentechnischer Schwierigkeiten nur in den Punkten $\alpha = \pi/3, \pi/2, \pi$ und 2π berechnet worden.

essierenden Bereich des Sektorwinkels $\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$ und des Radienverhältnisses $1 < a/b \leq 3$ besitzt nämlich der H_{11} -Wellentyp die größere Grenzwellenlänge. Darüber hinaus hat er das einfachste in einem Ringsektorleiter vorkommende Feldbild (Bild 5).

4. Bemerkungen über den Wellenwiderstand der magnetischen Grundwelle

Wie schon gezeigt wurde, hat die H_{11} -Welle die größte praktische Bedeutung von allen Wellentypen im Ringsektorleiter. Aus diesem Grunde wollen wir uns darauf beschränken, für diese einige Wellenwiderstandsdefinitionen zur Diskussion zu stellen.

Bekanntlich kann ein Widerstand aus Spannung und Strom, Leistung und Strom oder Leistung und Spannung bestimmt werden. Nun stimmen aber die Wellenwiderstände dieser drei Berechnungsmöglichkeiten für einen Hohlleiter nicht überein. So sind uns z. B. von der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter eine Anzahl Wellenwiderstandsdefinitionen bekannt. Diese haben alle das Produkt aus Feldwellenwiderstand und Seitenverhältnis b/a gemeinsam, unterscheiden sich aber durch einen konstanten Zahlenfaktor voneinander.

Für den H_{11} -Wellentyp des Ringsektorleiters liegen die Verhältnisse aber bedeutend komplizierter, da hier beide Transversalkomponenten des elektrischen Feldes (E_r , E_φ) und des magnetischen Feldes (H_r , H_φ) vorhanden sind.

So müssen bei der Berechnung der Longitudinalkomponente des Wandstromes auch die auf den Radialwänden fließenden Ströme in z -Richtung berücksichtigt werden, die es ja bekanntlich für die H_{10} -Welle auf den Seitenwänden des Rechteckhohlleiters nicht gibt.

Mit der für H_{mn} -Wellen gültigen Beziehung (Gl. (28)) erhält man die Stromgleichung

$$\int_r [S_z(\varphi, a, z) a d\varphi + S_z(\varphi, b, z) b d\varphi + S_z(0, r, z) dr + S_z(\alpha, r, z) dr] = 0, \quad (38)$$

die auch in der Form

$$\int_0^\alpha S_z(\varphi, a, z) a d\varphi = - \left[\int_0^\alpha S_z(\varphi, b, z) b d\varphi + \int_b^a S_z(0, r, z) dr + \int_b^a S_z(\alpha, r, z) dr \right] \quad (39)$$

geschrieben werden kann.

Man kann mit Hilfe der Gl. (27) zeigen, daß die linke Seite der Gl. (39) den in positive z -Richtung fließenden und die rechte Seite den in negative z -Richtung fließenden Wandstrom darstellt. Damit ist auf dem Außenleiter derselbe Strom, wenn auch in entgegengesetzter Richtung, wie auf der durch den Innenleiter und die beiden Radialwände gebildeten Rohrwand, vorhanden.

Mit Gl. (39) findet man für den Strom in positiver oder negativer z -Richtung

$$\hat{I}_z(z) = \exp(-j\beta_H z) \int_0^\alpha S_z(\varphi, a) a d\varphi. \quad (40)$$

Dieser ist für die H_{11} -Welle

$$\hat{I}_z(z) = j 2 C_{H_{11}} \frac{\beta_{H_{11}}}{\gamma_{H_{11}}} Z_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} a) \exp(-j\beta_{H_{11}} z). \quad (41)$$

Die maximale Spannung in radialer Richtung liegt am Ort der größten elektrischen Feldstärke

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\max}(z) &= \exp(-j\beta_{H_{11}} z) \int_b^a E_r(\alpha/2, r) dr = \\ &= j C_{H_{11}} \frac{\omega \mu}{\gamma_{H_{11}}} \exp(-j\beta_{H_{11}} z) \int_{\gamma_{H_{11}} b}^{\gamma_{H_{11}} a} \frac{\pi/\alpha}{\gamma_{H_{11}} r} \cdot \\ &\quad \cdot Z_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} r) d(\gamma_{H_{11}} r). \end{aligned} \quad (42)$$

Das Integral in Gl. (42) ist von der Form

$$\int \frac{p}{q} Z_p(q) dq = Z_p(q) + \int Z_{p+1}(q) dq$$

und kann für beliebige p in geschlossener Form nicht angegeben werden. Man wird daher in jedem speziellen Anwendungsfall eines der bekannten Integrationsverfahren zu Hilfe nehmen müssen.

Im verlustlosen Hohlleiter gilt für den durch eine Querschnittsfläche F hindurchtretenden Leistungsfluß

$$N = \frac{1}{2} \int_F (\mathbf{E}_{\text{tr}} \times \mathbf{H}_{\text{tr}}^*) d\mathbf{f}. \quad (43)$$

Im Fall des Ringsektorleiters wird aus Gl. (43)

$$N = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha (E_\varphi H_r^* - E_r H_\varphi^*) d\varphi dr. \quad (44)$$

Durch Einsetzen der Feldkomponenten (Gl. (26)) und Integration über den Umfang erhält man die durch die Querschnittsebene des Ringsektorleiters transportierte Leistung

$$N = \frac{\alpha}{4} C_{H_{11}}^2 \frac{\omega \mu}{\gamma_{H_{11}}^2} \frac{\beta_{H_{11}}}{\gamma_{H_{11}}} \cdot \quad (45)$$

$$\cdot \int_{\gamma_{H_{11}} b}^{\gamma_{H_{11}} a} \left\{ [Z'_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} r)]^2 + \left[\frac{\pi/\alpha}{\gamma_{H_{11}} r} Z_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} r) \right]^2 \right\} d(\gamma_{H_{11}} r).$$

Eine Integration läßt sich für beliebige π/α auch bei der Berechnung der transportierten Leistung nicht auf tabellierte Funktionen zurückführen.

Nachdem wir nun den Strom, die maximale Spannung und die transportierte Leistung — die beiden letzteren in Form eines Integrals — kennen, lassen sich die Wellenwiderstände nach den bekannten Definitionen angeben. So findet man unter Berücksichtigung von

$$\beta_{H_{11}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c, H_{11}}} \right)^2} \quad (46)$$

(c Lichtgeschwindigkeit)

mit den Gl. (41) und (42) den aus Strom und maximaler Spannung definierten Wellenwiderstand

$$Z = \frac{\hat{U}_{\max}}{\hat{I}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c,H_{11}}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\alpha Z_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} a)} \int_{\gamma_{H_{11}} b}^{\gamma_{H_{11}} a} \frac{1}{\gamma_{H_{11}} r} Z_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} r) d(\gamma_{H_{11}} r) \quad (47)$$

mit $Z_0 = 377 \Omega$. (48)

Gl. (47) stellt den einfachsten Ausdruck der drei möglichen Wellenwiderstände dar. Für praktische Anwendungen im Bereich des Sektorwinkels $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ und des Radienverhältnisses $1 < a/b \leq 3$ findet man mit Gl. (47) die Näherungslösung des Wellenwiderstandes

$$Z = \frac{\hat{U}_{\max}}{\hat{I}} \approx \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{c,H_{11}}}\right)^2}} \frac{1}{2\alpha} \cdot \left[1 + \frac{Z_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} b)}{Z_{\pi/\alpha}(\gamma_{H_{11}} a)} \right] \ln \frac{a}{b}. \quad (49)$$

Die aus Leistung und Spannung sowie aus Leistung und Strom definierten Wellenwiderstände können mit den Gl. (41), (42) und (45) berechnet werden.

Wie schon erwähnt, lassen sich die Integrationen nicht auf tabellierte Funktionen zurückführen, so daß man bei der Auswertung nach einem der bekannten Integrationsverfahren greifen muß.

5. Vergleich der berechneten H_{11} -Grenzwellenlänge mit einem Meßergebnis

Für eine Wanderfeldröhrenankopplung, wie sie in Bild 1 dargestellt ist, wurde ein Ringsektorleiter mit den Querschnittsabmessungen $a = 13,6$ mm, $b = 8$ mm und $\alpha = 1,4\pi$ angefertigt. Um den Meßfehler möglichst klein zu halten, wurde die Grenzwellenlänge der H_{11} -Welle aus Meßwerten bei acht verschiedenen Frequenzen innerhalb des G-Bandes ermittelt.

Die Messungen ergaben $\lambda_{c,H_{11}} = 9,35$ cm. Dieser Wert stimmt mit dem nach Gl. (36) berechneten von $\lambda_{c,H_{11}} = 9,39$ cm sehr gut überein.

Den Herren Dipl.-Ing. W. BÖHM und Dipl.-Ing. K. SEIFERT danke ich für die sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes.

Schrifttum

- [1] KLEIN, W., BETTING, J. und MAYERHOFER, E., Gesichtspunkte zur Dimensionierung von Wanderfeldröhren mit Tonnenmagnetfokussierung für Richtfunk. Telefunken-Röhre, H. 38 [1960], 85–98.
- [2] GOUBAU, G., Elektromagnetische Wellenleiter und Hohlräume. 1. Kapitel: HOHNERJÄGER, R., Theorie der elektromagnetischen Wellenleiter. Wiss. Verlagsges., Stuttgart 1955.
- [3] MARCUVITZ, N., Waveguide handbook. McGraw-Hill Book Co., New York 1951.

BUCHBESPRECHUNG

J. P. Schouten, *Operatorenrechnung*; mit Anwendungen auf technische Probleme. Springer-Verlag, Berlin 1961, VIII, 224 Seiten, 128 Bilder, 16 cm \times 23,5 cm, Ganzleinen, DM 31,50.

Das Buch stellt eine Zusammenfassung der Ergebnisse dar, die der Verfasser bei mehrjähriger Lehrtätigkeit über das Gebiet der Operatorenrechnung gesammelt hat. Dabei bemüht sich die Darstellung, zu zeigen, daß die gegen die Heavisidesche Operatorenrechnung bei Ingenieuren und Physikern bestehenden Vorurteile heute nicht mehr zu Recht bestehen, weil die Heavisidesche Operatorenrechnung sich heute hinreichend logisch begründen und auf der Laplaceschen Transformation und ihrer Umkehrung aufbauen läßt; diese allgemeine Begründung hat den großen Vorzug, daß sie gestattet, den Operatorenkalkül weit über den von HEAVISIDE angegebenen Geltungsbereich hinaus zu erweitern und auch noch Fälle auszumergen, in denen die Operatorenrechnung versagt. Zu bedauern ist, daß in dem vorliegenden Buch die Laplacesche Transformation abweichend von der bei K. W. WAGNER erfolgten Definition¹ benutzt wird. Wenn es sich auch nur um den zusätzlichen Faktor p handelt, der beide Definitionen unterscheidet, so hat die Wagnersche Definition

$$f(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

der Laplaceschen Transformation gegenüber den davon abweichenden gerade für Ingenieure und Physiker den großen Vorzug, daß alle sich entsprechenden Größen im Ober- und Unter-

bereich dieselbe physikalische Dimension haben und daß mit der Wagnerschen Definition der Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von HEAVISIDE und an das Schrifttum im Ausland gewahrt ist, wo die von WAGNER gegebene Definition im Gebrauch ist. Die Rechenregeln mit der von WAGNER definierten Laplace-Transformation sind — abgesehen von einigen Erweiterungen — mit den für die Heavisidesche Operatorenrechnung geltenden Rechenregeln identisch².

Das Buch von J. P. SCHOUTEN ist klar und übersichtlich geschrieben und gibt in 11 Kapiteln, von denen zwei der Begründung der Operatorenrechnung mittels Impulsfunktion und mittels der Laplaceschen Transformation gewidmet sind, eine gute Übersicht über eine Reihe von Problemen, wie z. B. Vorgänge beim Einschalten von Quellen mit periodischen Strömen, Transversalwellen längs elektrischer Doppelleitungen, Einschaltvorgänge in Kettenleitern, Einschaltvorgänge im induktionsfreien Kabel usw. Daneben werden sehr gut und klar mathematisch-theoretische Fragen behandelt wie die mit dem komplexen Umkehrintegral zusammenhängenden Fragen und die asymptotischen Entwicklungen.

Eine knappe Literaturübersicht, bei der man einschlägige Lehrbücher vermißt, sowie eine nur die wichtigsten Transformationsregeln enthaltende Zusammenstellung und ein Namens- und Sachregister runden das lesenswerte Buch ab.

A. THOMA

¹ Siehe K. W. WAGNER, Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation; 2. Auflage. J. A. Barth, Leipzig 1948.

² H. FACK, Zur Definition der Laplaceschen Transformation. A.E.Ü. 5 [1951], 439.

Über die kleinsten meßbaren Temperaturänderungen

von MAX J. O. STRUTT

Mitteilung aus dem Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

(A.E.Ü. 15 [1961], 355–358; eingegangen am 10. April 1961)

DK 536.5

Zunächst werden die Strahlungsenergiedichte und ihre spontanen Schwankungen in einem schwarzen Strahlungshohlraum nach M. PLANCK, A. EINSTEIN und H. A. LORENTZ betrachtet. Die kleinste beobachtbare Temperaturänderung wird dadurch gewonnen, daß die entsprechende Änderung der mittleren, von einer Fläche A absorbierten Strahlungsleistung gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Quadrat der Strahlungsleistungsschwankungen gesetzt wird. Für einen linearen Strahlungsempfänger wird die Rauschzahl F definiert als Verhältnis der verfügbaren mittleren Schwankungsleistung zur verfügbaren mittleren Signalleistung am Ausgang dividiert durch das Verhältnis der auftreffenden mittleren Strahlungsschwankungsleistung zur auftreffenden mittleren Strahlungsleistung am Eingang. Mit einem solchen Strahlungsempfänger wird die kleinste meßbare Temperaturänderung gegenüber dem oben erwähnten Wert um den Faktor F erhöht. Für jede Temperatur gibt es eine günstigste mittlere Empfangsfrequenz, welche auf den kleinsten Wert der meßbaren Temperaturänderung führt. Diese wird angegeben. Die kleinste meßbare Temperaturänderung ist proportional zu $\sqrt{\Delta f / \Delta \nu}$, wobei Δf den Frequenzbereich der gemessenen Schwankungen (mittlere Frequenz f) und $\Delta \nu$ den Frequenzbereich der empfangenen Strahlungsleistung (mittlere Frequenz $\nu \gg f$) bezeichnen. Dieser Faktor kann z. B. 10^{-6} betragen. Die kleinsten meßbaren Temperaturänderungen können dann diese Größenordnung erreichen (in Grad Kelvin).

The density of a radiation energy and its spontaneous fluctuations in a black radiation space are considered according to M. PLANCK, A. EINSTEIN und H. A. LORENTZ. The minimal observable value of temperature change is obtained, by making the corresponding change of mean value of the radiation power, absorbed by a surface A , equal to the square root of the mean square value of the spontaneous fluctuations of the said radiation power. Considering a linear radiation receiver, its noise figure F is defined as the ratio of the available mean fluctuation power to the available mean signal power at its output, divided by the ratio of the mean impinging fluctuation power to the mean impinging radiation power at its input. Using such a receiver, the minimal measurable value of temperature change is increased by a factor F as compared with its value, mentioned above. At each temperature a mean reception frequency exists, for which the measurable change of temperature attains a minimum. This frequency is calculated. The minimal measurable change of temperature is proportional to $\sqrt{\Delta f / \Delta \nu}$, where Δf is the frequency range of the measured fluctuations (at a mean frequency f) and $\Delta \nu$ is the frequency range of the received radiation power (at a mean frequency $\nu \gg f$). This factor may e.g. be 10^{-6} in a practical case. The resulting values of measurable temperature change may then be of this order of magnitude (in degrees K).

1. Der schwarze Strahlungshohlraum

Im Frequenzbereich zwischen ν und $\nu + \Delta \nu$ ist die mittlere (Zeitmittelwert oder Ensemblemittelwert) Strahlungsenergie nach dem Gesetz von M. PLANCK gegeben durch (der horizontale Strich soll die Mittelwertbildung andeuten)

$$\overline{W}_\nu = \frac{8 \pi h \nu^3 \Delta \nu}{c^3} \frac{V}{\exp(x) - 1} \quad (1)$$

mit

$$x = h \nu / k T.$$

Hierbei bezeichnet V das Hohlraumvolumen, c die Lichtgeschwindigkeit, h die Plancksche Konstante, k die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur. Für die obige Gleichung ist es wesentlich, zu beachten, daß T von der Frequenz ν unabhängig ist und überall im Hohlraum den gleichen Wert aufweist. Wenn wir den Höchstwert von \overline{W}_ν mit $\overline{W}_{\nu \max}$ bezeichnen, läßt sich leicht zeigen, daß

$$\frac{\overline{W}_\nu}{\overline{W}_{\nu \max}} = \frac{\frac{x^3}{\exp(x) - 1}}{\frac{x_{\max}^3}{\exp(x_{\max}) - 1}}$$

gilt, wobei $x_{\max} = 2,82$ zu $\overline{W}_{\nu \max}$ gehört. Somit ist dieses Verhältnis nur eine Funktion von x (vgl. Bild 1).

Die Energie W_ν ist nicht konstant, sondern weist spontane Schwankungen auf, welche von A. EINSTEIN 1912 und H. A. LORENTZ 1916 angegeben wurden ([1], [2], [5], letztere Stellen mit ausführlichem Schrifttum):

$$(\Delta W_\nu)^2 = (\overline{W_\nu} - \overline{W_\nu})^2 = \overline{W}_\nu h \nu \mu, \quad (2)$$

$$\mu = \frac{\exp(x)}{\exp(x) - 1}.$$

Die Funktionen $\overline{W}_\nu / \overline{W}_{\nu \max}$ sowie μ von $x = h \nu / k T$ sind in Bild 1 gezeichnet worden. Diese Abbildung gestattet, für jede Temperatur T und Strahlungsfrequenz ν (bzw. Wellenlänge $\lambda = c / \nu$) die zugehörigen Werte von x und μ abzulesen.

Wenn in der Wand des Hohlraumes ein relativ zu der Gesamtwandfläche kleines Loch mit der Fläche A angeordnet wird, so kann unter der Annahme, daß das Strahlungsgleichgewicht im Hohlraum nicht oder kaum gestört wird, die Strahlungsleistung P_ν berechnet werden, welche das Loch

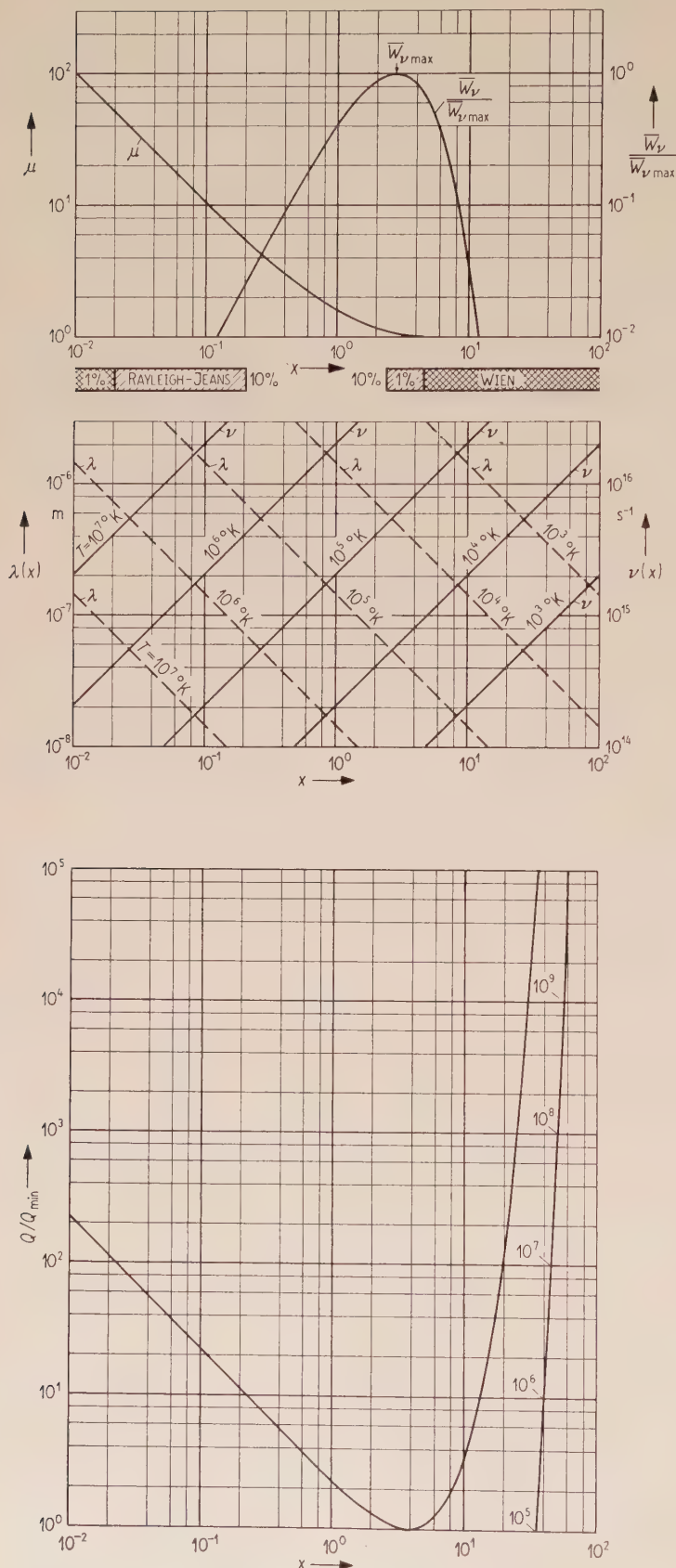


Bild 2. Das Verhältnis Q/Q_{\min} in Abhängigkeit von der Funktion $x = h\nu/kT$. Der Wert $Q_{\min} = 3,66$ liegt bei $x_{\min} = 3,83$.

Bild 1. Oberer Teil: Verhältnis $\bar{W}_\nu/\bar{W}_{\nu,\max}$ der mittleren Energie \bar{W}_ν im Frequenzbereich zwischen ν und $\nu + \Delta\nu$ zum Höchstwert $\bar{W}_{\nu,\max}$ sowie μ , beide als Funktion von $x = h\nu/kT$. Unterer Teil: Wellenlänge λ in m und Frequenz ν in Hz als Funktion von x bei verschiedenen Temperaturen T . Der Wert $\bar{W}_{\nu,\max}$ gehört zu $x_{\max} = 2,82$. Im doppeltschraffierten x -Bereich links gilt das Strahlungsgesetz von RAYLEIGH-JEANS innerhalb 1%, im schraffierten Bereich innerhalb 10%. Im doppeltschraffierten x -Bereich rechts gilt das Strahlungsgesetz von WIEN innerhalb 1%, im schraffierten Bereich innerhalb 10%.

durchsetzt. Diese beträgt

$$P_\nu = W_\nu \frac{cA}{4V}. \quad (3)$$

In analoger Weise, wie das mittlere Quadrat der spontanen Schwankungen von W_ν proportional zu $\mu \bar{W}_\nu$ ist, wird auch das mittlere Quadrat der spontanen Schwankungen von P_ν proportional zu $\mu \bar{P}_\nu$. Wir können die Leistung P_ν in eine Fourierreihe zerlegen [2], [5] und das mittlere Quadrat der Leistungsschwankung in einem Intervall Δf bei einer mittleren Frequenz $f \gg \Delta f$ berechnen. Hierbei ist $f \ll \nu$ [2], [5] vorausgesetzt:

$$(\Delta P_\nu)^2 = (P - \bar{P}_\nu)^2 = 2h\nu\mu\bar{P}_\nu\Delta f. \quad (4)$$

2. Die kleinste beobachtbare Änderung ΔT der Hohlraumtemperatur T

Zu einer Änderung ΔT von T gehört eine Änderung $\Delta \bar{P}_\nu$ von \bar{P}_ν , welche sich aus der Formel

$$\frac{d\bar{P}_\nu}{dT} = \bar{P}_\nu \mu \frac{x}{T} \quad (5)$$

ergibt. Wir setzen den Wert $\Delta \bar{P}_\nu$, der zum kleinsten beobachtbaren Wert ΔT gehört, gleich $\sqrt{(\Delta P_\nu)^2}$:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{\Delta \bar{P}_\nu}{\bar{P}_\nu \mu \frac{x}{T}} = \frac{\sqrt{(\Delta P_\nu)^2}}{\bar{P}_\nu \mu \frac{x}{T}} = \\ &= \frac{\sqrt{2h\nu\mu\bar{P}_\nu\Delta f}}{\bar{P}_\nu \mu \frac{x}{T}} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \Delta T &= \sqrt{\frac{h^2 c^2}{k^2 \pi A} \frac{[\exp(x) - 1]^2}{x^4 \exp(x)} \frac{\Delta f}{\Delta \nu}} = \\ &= Q(\nu, T) \sqrt{\frac{\Delta f}{A \Delta \nu}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Funktion Q von ν und T ist in Bild 2 in Abhängigkeit von x gezeichnet worden. Die betreffende Kurve in Bild 2 zeigt Q/Q_{\min} , wobei Q_{\min} den Minimalwert von Q darstellt. Dieser Wert Q_{\min} gehört zum Wert $x_{\min} = 3,83$ und beträgt etwa $Q_{\min} \approx 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ m}^\circ \text{K}$. Die Formel für Q kann vereinfacht werden zu

$$Q = 2 \frac{hc}{k\sqrt{\pi}} \frac{\sinh(x/2)}{x^2}. \quad (7)$$

3. Anwendung eines Strahlungsempfängers mit der Rauschzahl F

Die Rauschzahl eines Strahlungsempfängers muß zunächst definiert werden. Bei einem linearen Vierpol kann die Rauschzahl definiert werden als Verhältnis der verfügbaren Rauschleistung zur verfügbaren Signalleistung am Vierpolausgang dividiert durch das Verhältnis der verfügbaren Rauschleistung zur verfügbaren Signalleistung am Vierpol Eingang [3]. Es ist üblich, als verfügbare Rauschleistung am Eingang den Wert $kT_0\Delta f$ einzusetzen [3], wobei T_0 die Zimmertemperatur (z. B. 293°K) bezeichnet. Das Wort „Rauschleistung“ hat dieselbe Bedeutung wie „spontane Schwankungsleistung“. Der obige Wert $kT_0\Delta f$ rührt daher, daß bei Vierpolen in der Nachrichtenübermittlung meistens $h\nu \ll kT_0$ ist. In diesem Grenzfall (vgl. Bild 1) wird die Funktion $[\exp(x) - 1]^{-1}$ gleich x^{-1} . Im allgemeineren Fall, daß $h\nu$ nicht immer klein im Vergleich zu kT_0 ist, muß als verfügbare Rauschleistung am Eingang des Vierpols der Ausdruck

$$\frac{h\nu\Delta f}{\exp(x_0) - 1}, \quad x_0 = \frac{h\nu}{kT_0}$$

eingesetzt werden.

Bei einem Strahlungsempfänger haben wir keinen Vierpol im üblichen Sinne vor uns. Am Eingang befindet sich das Strahlungsfeld mit einer bestimmten Signalleistung und einer bestimmten Rauschleistung, welche auf den Empfänger treffen. Am Ausgang des Empfängers ist meistens ein Klemmenpaar vorhanden. Hier kann auch eine bestimmte verfügbare Signalleistung und eine bestimmte verfügbare Rauschleistung vorhanden sein. Wir nehmen an, daß der Empfänger für die Übertragung der Signalleistung und der Rauschleistung vom Eingang zum Ausgang linear sei. Dann kann eine Rauschzahl F des Empfängers definiert werden als Verhältnis der verfügbaren Rauschleistung zur verfügbaren Signalleistung am Ausgang dividiert durch das Verhältnis der verfügbaren Rauschleistung zur verfügbaren Signalleistung am Eingang. Wenn am Eingang ein „schwarzes“ Strahlungsfeld vorhanden ist, gilt für die hier vorhandene verfügbare Rauschleistung der Ausdruck $\sqrt{(\Delta P_r)^2}$, wobei $(\Delta P_r)^2$ der Gl. (4) zu entnehmen ist. Die genannte Rauschzahldefinition kann auch so formuliert werden, daß bei einem entsprechenden Vergleichsstrahlungsempfänger, der gar kein Eigenrauschen (keine Rauschquellen) aufweist, die gesamte verfügbare Rauschleistung am

Eingang gleich F -mal die hier wirklich verfügbare Rauschleistung (d. h. die auf den Empfänger aus dem Strahlungsfeld auftreffende Rauschleistung) gesetzt werden müßte.

Über die Frequenzbereiche am Eingang und am Ausgang des Empfängers ist in obiger Definition nichts ausgesagt worden. Am Eingang kann das Frequenzgebiet zwischen $\nu - \Delta\nu/2$ und $\nu + \Delta\nu/2$ empfangen werden. Am Ausgang kann der Frequenzbereich Δf bei der mittleren Frequenz f gemessen werden. Hierbei kann z. B. f auch gleich Null sein. Bei der Rauschzahldefinition ist dann am Eingang der Frequenzbereich Δf mit der mittleren Frequenz f zu berücksichtigen und am Ausgang der Frequenzbereich Δf ebenfalls mit der mittleren Frequenz f . Die Signalleistung am Eingang liegt im Bereich $\Delta\nu$ bei der mittleren Frequenz ν , die beobachtete Rauschleistung am Eingang im Bereich Δf bei der mittleren Frequenz f . Die Signalleistung und die Rauschleistung am Ausgang liegen beide im Frequenzbereich Δf bei der mittleren Frequenz f . Die Signalleistung am Eingang (Strahlungsleistung) kann mit der Frequenz f amplitudenmoduliert sein.

4. Messung kleinster Temperaturänderungen mittels eines Strahlungsempfängers mit der Rauschzahl F

Wir betrachten wieder den Fall, daß die Strahlung von einem schwarzen Hohlraum mit der frequenzunabhängigen Temperatur T stammt. In diesem Fall gilt für den hier betrachteten Strahlungsempfänger die Gl. (6) mit der Änderung, daß vor dem Wurzelzeichen im Zähler die Rauschzahl F des Strahlungsempfängers nach obiger Definition als Faktor erscheint:

$$\Delta T = Q(\nu, T) F \sqrt{\frac{\Delta f}{A\Delta\nu}}. \quad (8)$$

Die Begründung der Gl. (8) beruht darauf, daß die gesamte verfügbare Rauschleistung am Empfänger Eingang in diesem Fall gleich F -mal die verfügbare Strahlungsrauschleistung zu setzen ist, wie oben bemerkt.

Damit der Strahlungsempfänger geeignet ist, die Strahlungsleistung zu messen, muß sein verfügbarer Gewinn beträchtlich größer als eins sein. Dieser verfügbare Gewinn G ist definiert als Verhältnis der verfügbaren Signalleistung am Ausgang zur verfügbaren Signalleistung am Eingang. Das Rauschmaß M des Empfängers ist durch den Ausdruck [4]

$$M = \frac{F - 1}{1 - \frac{1}{G}}$$

gegeben. Dieses Rauschmaß bestimmt die Güte des Empfängers für den vorliegenden Zweck.

Aus den Gl. (8) und (6) geht hervor, daß die kleinste beobachtbare Temperaturänderung wesentlich herabgesetzt werden kann, wenn das Verhältnis $\Delta f/\Delta\nu$ verringert wird. Wenn z. B. $\Delta f/f \approx \Delta\nu/\nu \approx 1/100$ gesetzt wird, und ν läge bei 10^{16} , während f gleich 10^4 wäre, so würde $\Delta f/\Delta\nu$ etwa gleich 10^{-12} .

Die Herabsetzung von ΔT gegenüber dem Fall $\Delta f = \Delta \nu$ wäre in diesem Beispiel durch einen Faktor 10^6 gegeben*.

Zu jeder Temperatur T gibt es eine günstigste Frequenz ν bzw. Wellenlänge λ , für welche nach Gl. (6) und (8) die meßbare Temperaturänderung ΔT minimal wird. Diese können aus $x_{\min} = 3,83$ berechnet werden. Bild 1 erlaubt, die genannte günstigste Frequenz bzw. Wellenlänge angenähert für jede Temperatur sofort abzulesen.

Wenn die Meßfrequenz höher ist als die günstigste, zu x_{\min} gehörende Frequenz, nimmt die kleinste meßbare Temperaturänderung ΔT sehr rasch zu. Bei einer zehnmal zu hohen Frequenz ist sie nach Bild 2 bereits mehr als 10^5 mal größer als der kleinste Wert. Wenn die Meßfrequenz kleiner ist als der zu x_{\min} gehörende Wert, nimmt ΔT ebenfalls zu, aber wesentlich langsamer. Bei einer zehnmal zu kleinen

* In einer früheren Arbeit ([6], Gl. 15) ist für ΔT ein anderer Ausdruck als Gl. (8) angegeben worden. Es hat sich herausgestellt, daß jener Ausdruck auf einem Irrtum beruht, indem $\Delta(\bar{P}_\nu)^2$ dort gleich $(\Delta P_\nu)^2$ gesetzt wurde, was falsch ist. In Wirklichkeit ist $\Delta(\bar{P}_\nu)^2 = 2\bar{P}_\nu \Delta\bar{P}_\nu$. Bei Verwendung dieser Gleichung und von $(\Delta\bar{P}_\nu)^2 = (\Delta P_\nu)^2$, wie in der vorliegenden Arbeit, gelangt man zu Gl. (8).

Frequenz ist z. B. ΔT nur um etwa einen Faktor 6 größer als der kleinste Wert.

Die obige Arbeit wurde während des Aufenthalts des Verfassers als Visiting Mc Kay Professor of Electrical Engineering an der University of California in Berkeley im Frühjahr 1961 durchgeführt. Sie wurde durch die freundliche Atmosphäre und die gewährte Muße während dieses Aufenthaltes ermöglicht. Hierfür sei hier herzlich gedankt. Den Herren Dr. G. SPESCHA und M. SANCHEZ danke ich für ihre Hilfe bei der Berechnung der Kurven in den Bildern 1 und 2.

Schrifttum

- [1] LORENTZ, H. A., Les théories statistiques en thermodynamique. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1916.
- [2] SPESCHA, G. A., Experimentelle Untersuchungen über spontane Photonschwankungen. Dissertation Eidgenöss. Technische Hochschule Zürich, 1959, Nr. 2952.
- [3] STRUTT, M. J. O., Ultra- and extreme-short wave reception. D. van Nostrand, New York 1947.
- [4] HAUS, H. A. und ADLER, R. B., Circuit theory of noisy networks. Cambridge Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, 1959.
- [5] SPESCHA, G. A. und STRUTT, M. J. O., Theoretische Überlegungen zur experimentellen Bestimmung der spontanen Photonschwankungen. Helv. Phys. Acta **33** [1960], 53–68.
- [6] SPESCHA, G. A. und STRUTT, M. J. O., Definition und Messungen der Rauschzahl von Halbleiter-Photodioden, einschließlich Photonenrauschen. Sci. Electrica **5** [1959], Heft 4, 1–12.

BUCHBESPRECHUNG

J. Tschauner, Einführung in die Theorie der Abtastsysteme. R. Oldenbourg Verlag, München 1960, 185 Seiten, 86 Bilder, 15,5 cm \times 23,5 cm, broschiert, DM 32,—.

Der Begriff „Abtastsysteme“ ist hier sehr weit und allgemein gefaßt. Es werden darunter Systeme verstanden, die im wesentlichen aus einer sogenannten „Formierungsapparatur“ und einem „stetigen Teil“ bestehen. Eine endliche Anzahl diskreter Amplitudenwerte, die eine stetige Funktion zu bestimmten Zeitpunkten annimmt, wird in der Formierungsapparatur mittels einer Abtastfunktion in eine pulsmodierte Signalfolge umgesetzt. Diese Signalfolge wirkt auf den stetigen Teil ein und beeinflusst dessen Ausgangsgröße, die in vielen Fällen wieder eine stetige Funktion sein kann. Auf diese Weise läßt sich eine allgemeingültige Darstellungsmethode für Systeme angeben, in denen diskrete Signale auftreten. Es wird unterschieden zwischen offenen Abtastsystemen (ohne Rückkopplung) und geschlossenen Abtastsystemen (mit Rückkopplung, Regelkreise).

Das 1. Kapitel (63 S.) befaßt sich zunächst auf der Grundlage der gewohnten Frequenzgang-Methoden mit offenen Systemen, und zwar vorwiegend mit solchen, die lineares Verhalten zeigen. Es wird die Einwirkung verschiedener Abtastfunktionen auf den stetigen Teil untersucht. Definition, Berechnung, Anwendung und Beispiele stetiger Lösungen werden angegeben. Auf Frequenzcharakteristiken und Übertragungsfunktionen wird ausgiebig eingegangen. Kapitel 2 (69 S.) widmet sich den geschlossenen Systemen, wobei vorwiegend das Verhalten von P-Reglern untersucht wird. Dabei wird gezeigt, daß diese

nur in den Abtastzeitpunkten als geschlossen, sonst aber als offen betrachtet werden können. Somit ist die Theorie der offenen Systeme hier weitgehend anwendbar. Neben Frequenzcharakteristik und Übertragungsfunktion werden auch Fragen der Stabilität und die Einwirkung von Dirac-Stößen diskutiert. Außerdem werden Systeme mit einbezogenen Speicherelementen berücksichtigt. — Im abschließenden Kapitel („Mathematische Hilfsmittel“, 38 S.) werden zunächst nochmals die allgemeinen Grundzüge der Differenzenrechnung dargestellt, bei deren Anwendung die physikalische Anschaulichkeit des Rechnungsablaufes gewahrt bleibt. Da dieses Verfahren aber in vielen Fällen recht umständlich ist, wird daraufhin die Zeta-Transformation als besonders günstiges mathematisches Verfahren vorgestellt und auf die Berechnung von Übergangsprozessen angewendet. Weiterhin wird die Anwendbarkeit der Taylor-Transformation für das Rechnen mit diskreten Funktionen gezeigt. Der letzte Unterabschnitt befaßt sich mit der Optimierung von Abtastsystemen beim Vorliegen von Störungen.

Die Lektüre dieses Buches setzt gut fundierte Kenntnisse der höheren Mathematik voraus. Technische Einzelheiten der Abtastsysteme sind nicht berücksichtigt, abgesehen von einigen praktisch orientierten Rechenbeispielen. Die auftretenden Begriffe und Größen sind sorgfältig definiert. Verwandtschaften und Unterschiede zu stetigen Systemen werden häufig herausgestellt. Die hier dargelegte „Systemtheorie“ der Abtastsysteme weist Fachleuten auf den Gebieten der Pulsmodulation, Nachrichtenverarbeitung, Regelungs-, Steuerungs- und Fernwirktechnik nützliche, z. T. neue Wege zur Planung und Beurteilung derartiger Systeme. S. W. WAGNER

Neue Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen*

VON GERHARD-GÜNTER GASSMANN

Mitteilung der Standard Elektrik Lorenz AG, Lorenz-Röhrenwerk Eßlingen

(A.E.Ü. 15 [1961], 359—376; eingegangen am 29. März 1961)

DK 621.3.072.9:621.397.62

Ein neues Verfahren zur Erzeugung einer Richtspannung, die eine Funktion der Phasen- und Frequenzdifferenz zweier Wechselspannungen ist, wird behandelt. Es ist besonders für den Vergleich impulsförmiger Wechselspannungen geeignet und zeichnet sich durch sehr geringen Aufwand aus. Bei diesem Verfahren werden Phasenvergleichsschaltungen mit Speichereigenschaften verwendet, die trotz ihres geringen Aufwandes höchsten Qualitätsansprüchen genügen.

Die Anwendung von Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen in Nachlaufsynchronisationsschaltungen zur Synchronisation eines Oszillators — z. B. eines Horizontalablenkoszillators in Fernsehempfängern — bietet den erheblichen Vorteil, daß sowohl ein großer Fangbereich als auch eine ausgezeichnete Störfreiheit erreicht wird. Diese beiden Eigenschaften sind bei Anwendung herkömmlicher Phasenvergleichsschaltungen ohne Frequenzvergleich nicht miteinander vereinbar, so daß man bei diesen auf einen großen Fangbereich verzichten und Bedienungselemente zur Handnachstimmung vorsehen muß. Die Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen ermöglichen dagegen eine vollautomatische und störimmune Synchronisation. Die durch den Frequenzvergleich entstehende Richtspannung stimmt den Oszillator so nach, daß die Differenz zwischen Oszillator- und Synchronisierungsfrequenz sehr klein wird und die phasenabhängige Richtspannung synchronisieren kann.

Einleitend wird eine Analyse der erforderlichen Kennzeichen an Hand von bekannten Phasenvergleichsschaltungen durchgeführt, deren Ergebnisse vorerst zur Deduktion einer neuen, sehr einfachen Phasenvergleichsschaltung verwendet werden. Nach kurzer Betrachtung der grundsätzlichen Probleme beim Frequenzvergleich wird das neue Verfahren erläutert und seine Durchführung an Schaltungsbeispielen besprochen. Schließlich wird das hierbei auftretende Regelproblem in Nachlaufsynchronisationsschaltungen — und zwar sowohl beim Phasenvergleich als auch beim Frequenzvergleich — behandelt.

A new method is discussed for producing a rectified voltage that is a function of the phase and frequency difference of two alternating voltages. It qualifies in particular for the comparison of pulsed alternating voltages and is outstanding by very moderate complexity. This method uses phase comparison circuits with storage properties that satisfy the highest demands on quality, despite moderate complexity.

The application in follow-up synchronization circuits of phase and frequency comparison circuits for the synchronization of an oscillator (e. g. a horizontal deflection oscillator in TV receivers) offers the considerable advantage that a wide pull-in range is attained as well as excellent freedom from interference. With the adoption of conventional phase comparison circuits without frequency comparison these two properties cannot be reconciled so that the demand for a wide pull-in range must be sacrificed and control elements provided for manual tuning corrections. The phase and frequency comparison circuits, however, make possible a fully automatic synchronization with immunity to interference. The rectified voltage produced by the frequency comparison adjusts the tuning condition of the oscillator in a way that the difference between the oscillator and the synchronizing frequency becomes very low and capable of synchronizing the phase-dependent rectified voltage.

By reference to well-known phase comparison circuits the paper begins with an analysis of the required criteria whose results are used first for the deduction of a new phase comparison circuit of great simplicity. After a brief discussion of the basic problems encountered with frequency comparison the new method is explained and its realization discussed by reference to typical circuits. Finally the paper discusses the regulating problem encountered in follow-up synchronization circuits (both with phase comparison and with frequency comparison).

1. Grundlagen

1.1. Einweg- und Zweiweg-Phasenvergleichsschaltungen

Es gibt Phasenvergleichsschaltungen mit einem und mit zwei nichtlinearen Elementen als Gleichrichter. Da die Phasenvergleichsschaltungen mit zwei Gleichrichtern in vielen Fällen, im Sinne einer weiter unten folgenden Definition, symmetrisch arbeiten, bezeichnet man sie oft als symmetrische Phasenvergleichsschaltungen und die Schaltungen mit einem Gleichrichter als unsymmetrische Phasenvergleichsschaltungen. Diese Bezeichnung ist jedoch

nicht allgemein verwendbar, denn es gibt Schaltungen mit zwei Gleichrichtern, die unsymmetrisch arbeiten und Schaltungen mit einem Gleichrichter, die symmetrisch arbeiten, wie in Abschnitt 2 gezeigt wird.

Deshalb soll hier die Bezeichnung Einweg- bzw. Zweiweg-Phasenvergleichsschaltung angewendet werden.

Führt man die Summe oder Differenz zweier Wechselspannungen gleicher Frequenz (W_1 und W_2) einem Gleichrichter zu, so entsteht allgemein eine Richtspannung, die eine Funktion der Phasendifferenz der beiden Wechselspannungen ist.

Bild 1 zeigt eine solche Anordnung. Es handelt sich um die Prinzipschaltung einer Einweg-Phasenvergleichsschaltung.

* Stark erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten auf der 8. Jahrestagung der Fernseh-Technischen Gesellschaft (FTG) in Stuttgart 1960.

Die charakteristische Kennlinie einer Phasenvergleichsschaltung ist die Phasenvergleichscharakteristik. Sie zeigt die Abhängigkeit der erzeugten Richtspannung U von der Phasendifferenz φ der beiden Wechselspannungen. Es handelt sich also um die Funktion $U(\varphi)$.

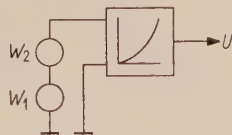


Bild 1. Prinzip einer Einweg-Phasenvergleichsschaltung.

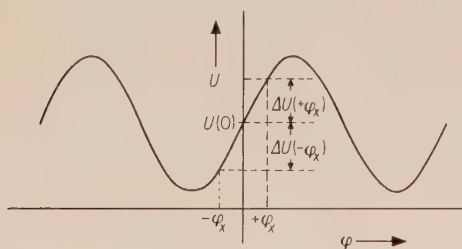


Bild 2. Unsymmetrische, sinusförmige Phasenvergleichscharakteristik.

Bild 2 zeigt als spezielles Beispiel eine sinusförmige Phasenvergleichscharakteristik einer Einweg-Phasenvergleichsschaltung.

Soll die gewonnene Richtspannung für Regelzwecke verwendet werden, so ist es erforderlich, die Sollphase ($\varphi = 0$) so zu legen, daß bei Abweichung von der Sollphase eine möglichst große Regelspannungsänderung $\Delta U(\varphi)$ auftritt, deren Polarität von der Richtung der Phasenabweichung abhängt. Es ist dabei vorerst belanglos, ob die Charakteristik bei Sollphase abfällt oder ansteigt, erst bei Verwendung der Schaltung in einem Regelkreis muß die Neigung beachtet werden.

Eine für den Regelkreis sehr wichtige Größe der Phasenvergleichsschaltung ist die Phasenvergleichsteilheit

$$S_{\varphi} = dU/d\varphi. \quad (1)$$

Sie liefert Betrag und Vorzeichen der Neigung der Phasenvergleichscharakteristik bei Sollphase.

Es ist allgemein erwünscht, daß Phasenvergleichsschaltungen symmetrisch arbeiten. Darunter versteht man, daß bei positiver Phasenabweichung φ die Richtspannungsänderung $\Delta U(\varphi)$ (Abweichung von der Richtspannung bei Sollphase $U(0)$) den gleichen Betrag, aber das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Richtspannungsänderung bei gleich großer, negativer Phasenabweichung hat. Es soll also, auch bei stark von der Sinusform abweichenden Phasenvergleichscharakteristiken,

$$\Delta U(\varphi) = -\Delta U(-\varphi) \quad (B2)^1$$

sein.

¹ Alle Gleichungen, die Qualitätsbedingungen ausdrücken, werden mit (B 2), (B 5) usw. bezeichnet. Gleichungen, die technische Bedingungen, zur Erfüllung von Qualitätsbedingungen, angeben, werden mit (T 4), (T 20) usw. bezeichnet.

Eine von der Sinusform abweichende Phasenvergleichscharakteristik hat allgemein die Bestandteile

$$U(\varphi) = U(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\varphi. \quad (3)$$

Die Summanden der ersten Summe erfüllen die Bedingung (B2), die der zweiten Summe dagegen nicht, denn

$$A_n \sin(n\varphi) = -A_n \sin(-n\varphi),$$

$$\text{dagegen} \quad B_n \cos(n\varphi) = +B_n \cos(-n\varphi).$$

Zur Erfüllung der Symmetriebedingung (B2) muß die zweite Summe in Gl. (3) verschwinden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\varphi = 0. \quad (T4)^1$$

Des weiteren ist es erwünscht, daß bei Ausfall einer der beiden Wechselspannungen W_1 und W_2 die gleiche Richtspannung wie bei Sollphase ($\varphi = 0$) entsteht, so daß

$$U(W_1 = 0) = U(W_2 = 0) = U(0) \quad (B5)$$

ist. Wird nämlich die Phasenvergleichsschaltung in einer Nachlaufsynchronisierschaltung verwendet, die bereits synchronisiert und auf Sollphase eingestellt ist, so stört ein kurzer Ausfall einer der beiden Wechselspannungen weder die Phase, noch die Frequenz des Oszillators, wenn Gl. (B5) erfüllt ist, weil die Richtspannung unverändert bleibt. Auch eine Amplitudenschwankung einer der Spannungen kann sich nicht störend auswirken.

Schließlich ist es zweckmäßig, daß die Richtspannung bei Sollphase Null ist und somit ihre Polarität direkt von der Polarität der Phasenabweichung φ abhängt:

$$U(0) = 0. \quad (B6)$$

Bei Erfüllung der Bedingung (B6) geht die Bedingungsgleichung (B2) über in

$$U(\varphi) = -U(-\varphi). \quad (7)$$

Beide Bedingungen (B5) und (B6) können durch Zweiweg-Phasenvergleichsschaltungen erfüllt werden. Eine Zweiweg-Phasenvergleichsschaltung besteht aus zwei Einweg-Phasenvergleichsschaltungen mit zwei gleichartigen Gleichrichtern. Der Gleichrichter des zweiten Zweiges wird mit umgekehrter Polung wie der Gleichrichter des ersten Zweiges betrieben. Außerdem wird dem zweiten Zweig die Differenzspannung und dem ersten Zweig die Summenspannung der beiden zu vergleichenden Wechselspannungen zugeführt. Schließlich werden die beiden Richtspannungen U_{11} und U_{12} mit einem Widerstandsteiler (1:1) addiert, so daß die Gesamtspannung

$$U = \frac{U_{11} + U_{12}}{2} \quad (8)$$

ist.

Bild 3 zeigt im Prinzip eine Zweiweg-Phasenvergleichsschaltung. Bei ihr erreicht die positive Richtspannung U_{11} des ersten Zweiges ihren Maximalwert, wenn die Richtspannung U_{12} des zweiten Zweiges ihren Minimalwert hat. Dieser Zustand tritt

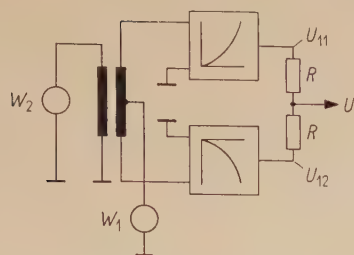


Bild 3. Prinzip einer Zweiweg-Phasenvergleichsschaltung.

bei einer bestimmten Phasenabweichung auf. Bei einer anderen Phasenabweichung ist es umgekehrt. Dazwischen gibt es eine Phase, bei der beide Richtspannungen U_{11} und U_{12} gleich groß sind, so daß wegen Gl. (8) die Gesamttrichterspannung $U = 0$ ist. Wird diese Phase als Sollphase ($\varphi = 0$) bezeichnet, so ist Gl. (B 6) erfüllt. Die Bezugsphase (oder Sollphase) ist also definiert durch

$$U_{11}(0) = -U_{12}(0). \quad (9)$$

Sind die Gleichrichter der beiden Zweige gleich, so sind die Phasenvergleichsteilheiten der beiden Zweige sowohl untereinander gleich als auch gleich der Phasenvergleichsteilheit der Gesamtschaltung:

$$S_{\varphi_1} = S_{\varphi_2} = S_{\varphi}, \quad (10)$$

$$S_{\varphi_1} = dU_{11}/d\varphi, \quad S_{\varphi_2} = dU_{12}/d\varphi. \quad (11)$$

Ist W_1 gemäß Bild 3 die Wechselspannung, die beiden Zweigen gleichpolig zugeführt wird, und W_2 die Wechselspannung, die beiden Zweigen gegenpolig zugeführt wird, so liegen bei Ausfall von W_1 an den Gleichrichtern die Wechselspannungen W_2 und $-W_2$. Der Betrag der beiden gegenpoligen Richtspannungen muß also zwangsläufig gleich groß sein, so daß auch die Bedingung (B 5) erfüllt ist. Fällt dagegen W_2 aus, so ist nur dann der Betrag der beiden gegenpoligen Richtspannungen gleich, wenn W_1 zur Zeitachse symmetrisch ist.

Es gibt zwei Möglichkeiten für abszissensymmetrische Kurvenzüge. Bei der ersten ist

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \sin(2n-1)x + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} \cos(2n-1)x. \quad (12)$$

In diesem Fall ist, wie Bild 4 zeigt,

$$y(x) = -y(x - \pi). \quad (13)$$

Bei der zweiten Möglichkeit ist

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \quad (14)$$

Hier ist, wie Bild 5 zeigt,

$$y(x) = -y(-x). \quad (15)$$

Im allgemeinen steht eine Spannung der Art (13) oder (15), wie sie für die Phasenvergleichsschaltung als W_1 erwünscht ist, nicht unmittelbar zur Verfügung, weil in fast allen Fällen eine oberwellenhaltige Wechselspannung durch Ansteuerung eines

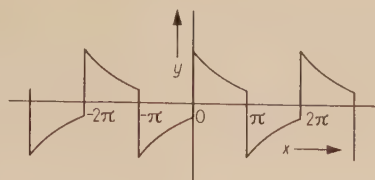


Bild 4. Funktion der Art $y(x) = -y(x - \pi)$.

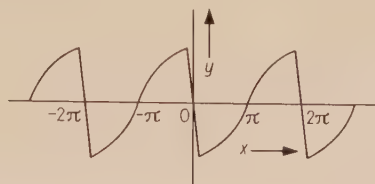


Bild 5. Funktion der Art $y(x) = -y(-x)$.

nichtlinearen Zwei- oder Vierpols, z. B. durch Übersteuerung eines Verstärkers, entsteht und dabei nicht abszissen- sondern nur ordinatensymmetrische Spannungen gebildet werden.

Die Beziehung zwischen Eingangsspannung $W = \bar{W} \cos \Omega t$ und der Ausgangsspannung $\bar{\bar{W}}$ eines nichtlinearen Vierpols ist gegeben durch die Reihenentwicklung

$$\bar{\bar{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n W^n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (16)$$

Setzt man $\bar{W} \cos \Omega t$ für W ein, so folgt

$$\bar{\bar{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \bar{W}^n \cos^n \Omega t. \quad (17)$$

Durch Umformung ergibt sich

$$\bar{\bar{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \Omega t. \quad (18)$$

Diese Spannung hat eine ordinatensymmetrische Kurvenform mit dem Kennzeichen

$$y(x) = y(-x), \quad (19)$$

denn $\cos x = \cos(-x)$. Bild 6 zeigt einen solchen Kurvenzug. Man kann eine Spannung der Art (19)

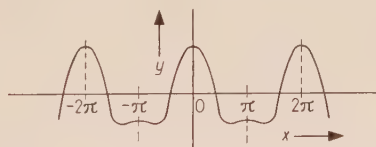


Bild 6. Funktion der Art $y(x) = y(-x)$.

leicht in eine Spannung der Art (15) umwandeln, indem man sie z. B. mit einem Widerstand und einem Kondensator durch große Spannungsteilung differenziert oder integriert, denn dadurch werden alle \cos -Werte in \sin -Werte übergeführt. Für die Wahl einer Spannung der Art (15), im Gegensatz zu der ebenfalls zur Erfüllung von Gl. (B 5) geeigneten Art (13), spricht noch eine andere sehr wichtige Tatsache: Ist die gleichpolig zugeführte Spannung W_1

eine Spannung der Art (15) und die gegenpolig zugeführte Spannung W_2 eine Spannung der Art (19), so ist zwangsläufig die Phasenvergleichsscharakteristik eine Kurve der Art (15), so daß zusätzlich die Bedingung (B 2) erfüllt ist (Beweis siehe Anhang).

Es besteht also zur Erfüllung der Qualitätsbedingungen (B 5) und (B 2) die technische Bedingung

$$W_1(\Omega_1 t) = -W_1(-\Omega_1 t). \quad (\text{T } 20)$$

Darin ist Ω_1 die Grundfrequenz von W_1 .

Eine Impulsspannung wird durch Differenzieren in eine Doppelimpulsspannung und durch Integrieren in eine Sägezahnspannung umgeformt. Da hier der Vergleich von Impulsspannungen im Vordergrund des Interesses steht, spielt dabei vor allem die Doppelimpulsspannung eine besondere Rolle.

1.2. Die Nachlaufsynchronisation

Die Phasenvergleichsschaltung ist ein wesentlicher Bestandteil von Nachlaufsynchroniserschaltungen. Bild 7 zeigt das Prinzip der Nachlaufsynchronisation.

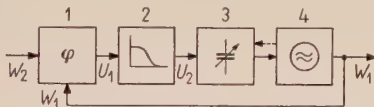


Bild 7. Prinzip der Nachlaufsynchronisation.

chronisation. Darin ist 1 die Phasenvergleichsschaltung, die später durch die neue Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung ersetzt wird. Man führt ihr die Synchroniserspannung W_2 und die vom Oszillator 4 kommende Vergleichsspannung W_1 zu. Sie erzeugt die Richtspannung U_1 , die in dem Siebglied 2 gesiebt und dadurch von kurzen Störungen und Rauschen weitgehend befreit wird. Die gesiebte Richtspannung U_2 wird der mit dem Symbol eines Drehkondensators bezeichneten Nachstimmstufe 3 zugeführt, die schließlich die Frequenz des Oszillators 4 nachstimmt. Bild 8 zeigt die Nach-

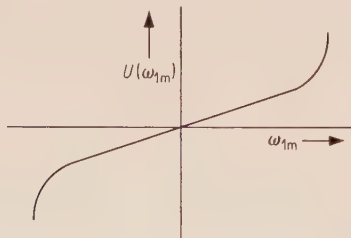


Bild 8. Nachstimmcharakteristik der Nachstimmstufe.

stimmcharakteristik einer Nachstimmstufe. Auf der Ordinate ist die zugeführte Richtspannung² $U(\omega_{1m})$ und auf der Abszisse die Frequenzabweichung ω_{1m} der Oszillatorfrequenz Ω_1 von der Mittenfrequenz Ω_m des Nachstimmbereiches aufgetragen:

² Wenn die betreffende Spannung vor und hinter dem Siebglied gleich ist, wird ihre Bezeichnung nicht mit einem Index versehen. So ist z. B. $U_1(\varphi) = U_2(\varphi) = U(\varphi)$ und $U_1(\omega_{21}) = U_2(\omega_{21}) = U(\omega_{21})$. Der Index 1 bzw. 2 wird nur dort verwendet, wo diese Unterscheidung nötig ist.

$$\omega_{1m} = \Omega_1 - \Omega_m. \quad (21)$$

Die Nachstimmteilheit

$$S_\omega = d\omega_{1m}/dU \quad (22)$$

muß immer das gleiche Vorzeichen wie die Phasenvergleichssteilheit S_φ haben, weil die Regelteilheit des ganzen Regelkreises

$$S = S_\varphi S_\omega = d\omega_{1m}/d\varphi \quad (23)$$

aus Stabilitätsgründen positiv sein muß (vgl. Abschnitt 5.2). Es besteht also die Synchronisationsbedingung

$$S_\varphi S_\omega = + |S|. \quad (\text{B } 24)$$

Nachlaufsynchroniserschaltungen, in denen Phasenvergleichsschaltungen angewendet werden, haben den großen Nachteil, daß man einen Kompromiß zwischen Fangbereich und Störfreiung schließen muß. Bei hinreichender Störfreiung durch die Siebung des Siebgliebes und großem Haltebereich ist der Fangbereich wesentlich kleiner als der Haltebereich, so daß eine Synchronisationshysterese auftritt und man gezwungen ist, zusätzlich einen Handabstimmknopf vorzusehen. Die Synchronisation ist also nur halbautomatisch. Die Ursache dieses Nachteils und seine Beseitigung durch die Verwendung der neuen Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen werden im Abschnitt 3 behandelt.

Unter Haltebereich versteht man bekanntlich den Teil des Nachstimmbereiches, in dem eine einmal erreichte Synchronisation auch erhalten bleibt. Der Fangbereich ist wiederum der Teil des Haltebereiches, in dem sich selbsttätig Synchronisation einstellt. Da durch die Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen der Fangbereich mit Hilfe einer verstimmungsabhängigen Richtspannung erheblich vergrößert wird, ist bei diesen eine weitere Unterscheidung nötig. Es soll der „Phasenfangbereich“ den ursprünglichen, allein durch den Phasenvergleich entstehenden Fangbereich, und der „Frequenzfangbereich“ den neuen, durch den zusätzlichen Frequenzvergleich entstehenden, vergrößerten Fangbereich kennzeichnen.

2. Eine neue symmetrische Einweg-Phasenvergleichsschaltung

Zweiweg-Phasenvergleichsschaltungen haben den doppelten Aufwand wie Einweg-Phasenvergleichsschaltungen und benötigen außerdem für eine der beiden zu vergleichenden Wechselfspannungen eine mit zusätzlichem Aufwand verbundene Gegentaktsteuerung. Trotzdem haben sie eine weite Verbreitung, weil man mit ihnen die Qualitätsbedingungen (B 2), (B 5) und (B 6) erfüllen kann.

Es soll nun untersucht werden, ob grundsätzlich eine Einwegphasenvergleichsschaltung diese Qualitätsbedingungen nicht erfüllen kann, bzw. welche technischen Schaltungsbedingungen zur Realisierung einer symmetrischen Einweg-Phasenvergleichsschaltung erfüllt werden müssen.

Die Bedingung (B 5) in Verbindung mit (B 6) fordert, daß bei Zuführung nur einer der beiden

Wechselspannungen W_1 bzw. W_2 der Gleichrichter keine Richtspannung erzeugt. Führt man eine allgemeine Wechselspannung

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n \Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n \Omega t) \quad (25)$$

einem allgemeinen, nichtlinearen Element zu, so ist die Ausgangsspannung

$$\overline{\overline{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n W^n. \quad (26)$$

Wird Gl. (25) in Gl. (26) eingesetzt, so zeigt die umfangreiche, aber elementare Rechnung, daß die entstehenden Gleichspannungsanteile verschwinden, wenn man alle α_{2n} , alle b_{2n} und alle a_{2n} oder b_{2n-1} unterdrückt. Das heißt, daß sowohl die Spannung W_1 als auch die Spannung W_2 Spannungen der Art (13) oder (15) sein müssen. Werden zwei Wechselspannungen der Art (15) verwendet, so wird außerdem die Bedingung (B 2) erfüllt (Beweis siehe Anhang). Zur technischen Bedingung (T 20) für W_1 kommt in diesem Fall die analoge Bedingung für W_2 hinzu:

$$W_2(\Omega_2 t) = -W_2(-\Omega_2 t). \quad (T 27)$$

Für den Gleichrichter gilt Gl. (16) mit der Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} W^{2n} = 0, \quad (T 28)$$

so daß

$$\overline{\overline{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n-1} W^{2n-1} \quad (29)$$

ist. Wegen

$$W^{2n-1} = -(-W)^{2n-1} \quad (30)$$

erfüllt die Kennlinie des Gleichrichters ebenfalls das Kennzeichen (15). Das nichtlineare Element muß sich also in beiden Polarisationsrichtungen gleich verhalten. Ein solches polarisationsunabhängiges nichtlineares Element ist z. B. ein Varistor, auch VDR (Voltage Dependent Resistor) genannt. Bild 9 zeigt seine Kennlinie.

Es muß nun geprüft werden, ob die Erzeugung einer phasenabhängigen Richtspannung möglich ist, wenn der Gleichrichter ein nichtlineares, polarisationsunabhängiges Element ist und die Wechselspannungen W_1 und W_2 die Bedingungen (T 20) und (T 27) erfüllen. Die Erzeugung einer Richtspannung mit einem solchen Element ist nur möglich, wenn die

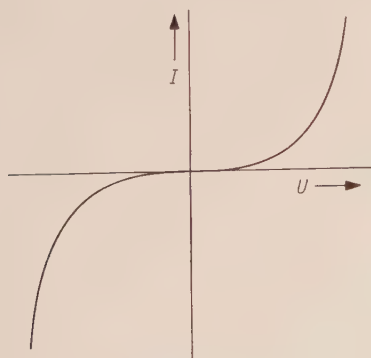


Bild 9. Kennlinie eines VDR.

Summenspannung nicht eine Spannung der Art (13) bzw. (15) ist.

Bei $\varphi = 0$ soll keine Richtspannung erzeugt werden, dort muß auch $W_+ = W_1 + W_2$ eine Spannung der Art (13) bzw. (15) sein. Für die anderen Phasen $\varphi \neq 0$, bei denen eine Richtspannung erwünscht ist, muß W_+ Komponenten der Art (19) haben.

In der folgenden Rechnung sind die Spannungen W_1 und W_2 Spannungen der Art (15), so daß die Gl. (T 20) und (T 27) erfüllt sind. Die Phase φ zwischen den beiden Wechselspannungen sei so in φ_1 für W_1 und φ_2 für W_2 aufgespalten, daß zur Zeit $t = 0$ wie bei $\varphi = 0$ die Grundwelle der Summenspannung durch Null geht. Es ist dann

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n(\Omega_1 t + \varphi_1), \quad (31)$$

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n(\Omega_1 t - \varphi_2)$$

$$\text{mit} \quad \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{c_1}{a_1}. \quad (32)$$

Die Summenspannung ist

$$W_+ = W_1 + W_2,$$

$$W_+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\sin n \varphi_1 \cos n \Omega_1 t + \cos n \varphi_1 \sin n \Omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-\sin n \varphi_2 \cos n \Omega_1 t + \cos n \varphi_2 \sin n \Omega_1 t)$$

bzw.

$$W_+ = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n \varphi_1 - c_n \sin n \varphi_2) \cos n \Omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \varphi_1 + c_n \cos n \varphi_2) \sin n \Omega_1 t. \quad (33)$$

Die erste Summe faßt alle ordinatensymmetrischen Komponenten, die zur Richtspannungserzeugung beitragen, zusammen und in der zweiten Summe sind die abszissensymmetrischen Komponenten enthalten.

Aus Gl. (33) folgt, daß nur dann eine Richtspannung $U(\varphi)$ entstehen kann, wenn mindestens bei einem Summanden

$$a_n \sin n \varphi_1 \neq c_n \sin n \varphi_2 \quad (T 34)$$

ist. Diese technische Bedingung ist im allgemeinen erfüllt. Sie ist jedoch nicht erfüllt, wenn die Zeitfunktionen der beiden Spannungen W_1 und W_2 (abgesehen von der Phasenverschiebung) gleich sind, denn dann ist $a_n = c_n$ und $\varphi_1 = \varphi_2$. Polt man in einem solchen Fall eine der beiden Spannungen um, so ist Gl. (T 34) wieder erfüllt, weil zwar $\varphi_1 = \varphi_2$, aber $a_n = -c_n$ ist.

Im praktischen Betrieb sollte man jedoch diese Lösung vermeiden, weil auf diese Weise die Gesamtwechselspannung bei Sollphase Null ist, so daß der Ausgangswiderstand des Gleichrichters bei Sollphase sehr hochohmig wird, was in Regelkreisen unerwünscht ist.

Die Bedingung (T 34) verlangt also, daß die beiden zu vergleichenden Wechselspannungen möglichst stark unterschiedliche Kurvenformen haben müssen. Sollen z. B. gleichartige Impulsspannungen verglichen werden, so empfiehlt es sich, die eine zu integrieren und die andere zu differenzieren. Dadurch entstehen zwei Spannungen der Art (15), die sich in der Form stark unterscheiden.

Eine nach diesen Vorschriften aufgebaute Einweg-Phasenvergleichsschaltung erfüllt alle Qualitätsbedingungen, so daß sie einer Zweiweg-Phasenvergleichsschaltung in keiner Weise nachsteht.

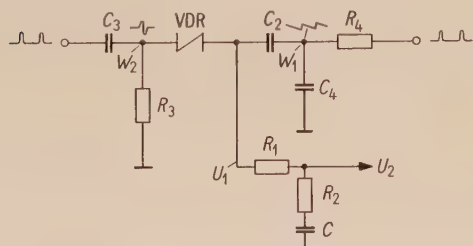


Bild 10. Symmetrische Einweg-Phasenvergleichsschaltung mit VDR.

Bild 10 zeigt als Beispiel das Schaltbild einer symmetrischen Einweg-Phasenvergleichsschaltung für Impulsspannungen mit einem VDR als Gleichrichter.

Mit dem Kondensator C_3 und dem Widerstand R_3 wird die eine der beiden zu vergleichenden Impulsspannungen differenziert. Mit dem Widerstand R_4 und dem Kondensator C_4 wird die andere Impulsspannung integriert. Der VDR liegt in Serie mit dem Koppelkondensator C_2 zwischen diesen beiden umgeformten Spannungen, so daß an ihm die Differenzspannung liegt. Die erzeugte Richtspannung U_1 wird mit dem Siebglied R_1, R_2, C gesiebt.

Die relativ große Eigenkapazität des VDR beschränkt seine Verwendbarkeit in dieser Schaltung auf Impulsfrequenzen unter 30 kHz.

Im Abschnitt 4.3 wird gezeigt, daß mit einer Zenerdiode als Gleichrichterelement und entsprechender Dimensionierung sogar eine Einweg-Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung realisiert werden kann.

3. Die Gewinnung verstimmungsabhängiger Richtspannungen³

Führt man einer Phasenvergleichsschaltung zwei Wechselspannungen ungleicher Frequenz zu, so ist allgemein

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \Omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n \Omega_1 t, \\ W_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n \Omega_2 t + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n \Omega_2 t. \end{aligned} \quad (35)$$

³ Die Bezeichnung „verstimmungsabhängige Richtspannung“ unterscheidet die beim Frequenzvergleich entstehende Richtspannung deutlich von der „frequenzabhängigen Richtspannung“, wie sie ein Diskriminator liefert.

Die Differenzfrequenz ist

$$\omega_{21} = \Omega_2 - \Omega_1. \quad (36)$$

Nun ist $\varphi = \int \omega_{21} dt$, so daß für konstante Differenzfrequenz ω_{21} die Phasendifferenz

$$\varphi = \omega_{21} t \quad (\omega_{21} = \text{const}) \quad (37)$$

ist. Man kann also auch die Schreibweise

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n \Omega_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n \Omega_1 t, \quad (38)$$

$$W_2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n (\Omega_1 t + \varphi) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n (\Omega_1 t + \varphi)$$

wählen. Setzt man die Summe $W_+ = W_1 + W_2$ gemäß Gl. (38) in Gl. (26) ein, so ergibt sich bei Streichung aller Wechselspannungskomponenten die Richtspannung nach Gl. (3). Wendet man für Gl. (3) die Substitution (37) an, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} u_1(\omega_{21} t) &= U(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n \omega_{21} t + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n \omega_{21} t. \end{aligned} \quad (39)$$

Bei Zuführung zweier Wechselspannungen ungleicher Frequenz gibt eine Phasenvergleichsschaltung also eine Spannung gemäß Gl. (39) ab. Diese Spannung hat den Gleichspannungsanteil, den die Schaltung bei Sollphase abgibt, und einen Wechselspannungsanteil mit der Grundfrequenz ω_{21} und einer Kurvenform, die identisch ist mit der Kurvenform der Phasenvergleichscharakteristik.

Wird die Spannung $u_1(\omega_{21} t)$ einem Siebglied zugeführt, so ist die gesiebte Wechselspannung

$$u_2(\omega_{21} t) = \int_0^t u_1(\omega_{21} t) f(t - \tau) d\tau. \quad (40)$$

In dem Faltungsintegral (40) ist τ die variable Zeitgröße zwischen $\tau = 0$ und $\tau = t$ und $f(t)$ die „Gewichtsfunktion“ des Siebgliedes. Unter Gewichtsfunktion versteht man allgemein die inverse Laplacetransformierte der Übertragungsfunktion $F(p)$ eines Netzwerkes [4]. $u_2(\omega_{21} t)$ hat bei größerem ω_{21} und geringer Bandbreite des Siebgliedes nur noch sehr kleine Amplituden, so daß im wesentlichen nur der Gleichspannungsanteil $U(0)$ übrig bleibt. Befindet sich die Phasenvergleichsschaltung im Regelkreis einer Nachlaufsynchronisierschaltung, in der W_2 die Synchronisierfrequenz und W_1 die Oszillatorfrequenz ist, so ist eine selbsttätige Nachstimmung des Oszillators zur Synchronisation nicht möglich.

Das ist der Grund, warum bei starker Siebung und somit guter Störfreiung der Fangbereich gewöhnlicher Phasenvergleichsschaltungen recht klein ist, denn erst bei geringer Differenzfrequenz ω_{21} ist die Amplitude von $u_2(\omega_{21} t)$ so groß, daß eine wirkliche Nachstimmung und somit Synchronisation möglich ist.

Es stellt sich also die Aufgabe, zur Vergrößerung des Fangbereiches bei gleichbleibender Siebung, eine verstimmungsabhängige Richtspannung $U(\omega_{21})$ zu

erzeugen, bei der die Polarität der Richtspannungsabweichung $\Delta U(\omega_{21})$ von der Polarität der Frequenzabweichung ω_{21} abhängt. Die Polarität von ω_{21} sagt gemäß Gl. (36) aus, ob die Synchronisierungsfrequenz Ω_2 größer oder kleiner als die Oszillatorfrequenz Ω_1 ist. Diese Aufgabe wird durch eine Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung gelöst.

Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen erzeugen sowohl eine phasenabhängige Richtspannung $U(\varphi)$ als auch eine verstimmungsabhängige Richtspannung $U(\omega_{21})$. Die Arbeitsweise einer solchen Schaltung beim Frequenzvergleich ist grundsätzlich anders als die Arbeitsweise eines Diskriminators, denn ein Diskriminator vergleicht nicht die Frequenz zweier Spannungen, sondern die Frequenz einer Spannung mit der Festfrequenz zweier Schwingkreise. Wendet man eine Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung in einer Nachlaufsynchronisierung an, so erreicht man sowohl einen großen Fangbereich (Frequenzfangbereich) als auch eine ausgezeichnete Störfreiheit. Eine bekannte, aber sehr aufwendige Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung ist der Quadricorrelator [1].

Die kennzeichnende Kennlinie für den Frequenzvergleich ist die Frequenzvergleichscharakteristik $U(\omega_{21})$. Sie zeigt die Abhängigkeit der erzeugten Richtspannung U von der Frequenzdifferenz ω_{21} der beiden Wechselspannungen.

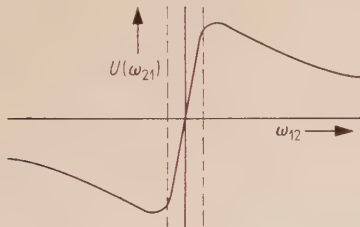


Bild 11. Frequenzvergleichscharakteristik.

Bild 11 zeigt als Beispiel die Frequenzvergleichscharakteristik einer der neuen Schaltungen. Die senkrechten gestrichelten Linien kennzeichnen die Grenzen des Phasenfangbereiches. Auch hier besteht die Symmetriebedingung

$$\Delta U(\omega_{21}) = -\Delta U(-\omega_{21}). \quad (\text{B } 41)$$

Außerdem ist erwünscht, daß die Frequenzvergleichsrichtspannung bei verschwindender Frequenzdifferenz gleich der Phasenvergleichsrichtspannung bei verschwindender Phasendifferenz ist:

$$U(\omega_{21} = 0) = U(\varphi = 0) = U(0), \quad (\text{B } 42)$$

so daß bei verschwindender Frequenzdifferenz nur die phasenabhängige Richtspannung $U(\varphi)$ übrig bleibt. Wegen dieser Bedingung ist für beide Fälle ($\varphi = 0$ und $\omega_{21} = 0$) die Bezeichnung $U(0)$ verwendbar, so daß Gl. (B 5) und (B 6) auch für die Frequenzvergleichscharakteristik gilt. Bei Berücksichtigung von Gl. (B 42) und (B 6) geht Gl. (B 41) über in

$$U(\omega_{21}) = -U(-\omega_{21}). \quad (\text{B } 43)$$

Die in Bild 11 gezeigte Charakteristik erfüllt Gl. (43).

Die differenzfrequente Wechselspannung $u_1(\omega_{21}t)$ ist die einzige Größe, in der ω_{21} unmittelbar enthalten ist. Es soll nun geprüft werden, unter welchen Voraussetzungen sie zur Gewinnung einer verstimmungsabhängigen Richtspannung mit den Bedingungen (B 6), (B 41) und (B 42) verwendbar ist.

Setzt man in Gl. (39) statt ω_{21} den Wert $-\omega_{21}$ ein, so kehrt sich das Vorzeichen der ersten Summe um, das der zweiten Summe dagegen nicht ($\cos(-x) = \cos x$).

Entspricht die Phasenvergleichscharakteristik der Bedingung (B 2), so verschwindet diese zweite Summe. Das Vorzeichen von $u_1(\omega_{21}t)$ hängt dann unmittelbar von der Richtung der Frequenzabweichung ab.

Dadurch entsteht ein deutliches Kriterium für die Erzeugung einer verstimmungsabhängigen Richtspannung. Dies ist ein weiterer Vorteil, der sich bei Einhaltung der Symmetriebedingung (B 2) ergibt. Entspricht dagegen die Phasenvergleichscharakteristik der Gl. (13), so ist nur dann eine Erkennung der Vorzeichenänderung von ω_{21} möglich, wenn die Anfangsphase bekannt ist. Es ist nicht möglich, unmittelbar aus der Form des Spannungsverlaufes zu erkennen, ob ω_{21} positiv oder negativ ist.

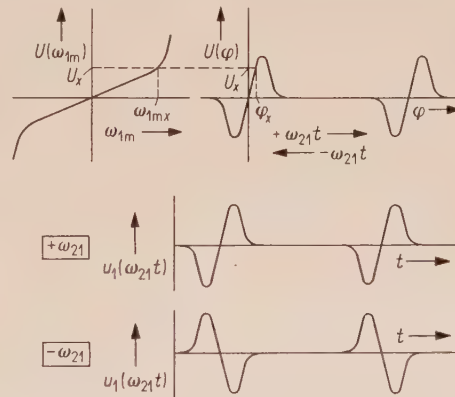


Bild 12. $U(\varphi)$ einer Phasenvergleichsschaltung im synchronisierten und im nichtsynchronisierten Zustand.

Bild 12 zeigt oben rechts eine Phasenvergleichscharakteristik, von der die Bedingungen (B 2), (B 5) und (B 6) erfüllt werden. Links daneben ist eine Nachstimmcharakteristik, die ebenfalls eine positive Neigung hat und somit Gl. (B 24) erfüllt. Im synchronisierten Zustand ($\Omega_1 = \Omega_2$) ist $U_1 = U_2$, wenn der Übertragungsfaktor des Siebgliedes für Gleichspannungen eins ist ($F(0) = 1$), was bei Verwendung üblicher RC -Siebelemente der Fall ist.

Ist die Frequenzabweichung ω_{1m} des synchronisierten Oszillators positiv, z. B. $\omega_{1m,x}$, so ist zur Aufrechterhaltung der Synchronisation auch eine positive Phasenabweichung φ_x erforderlich, um die nötige positive Richtspannung $U_x(\varphi_x)$ zu erzeugen. Im synchronisierten Zustand ist dann wegen $\Omega_1 = \Omega_2$

$$\omega_{1m(\text{syn})} = \Omega_1 - \Omega_m = \Omega_2 - \Omega_m$$

und damit zwangsläufig $\Omega_2 > \Omega_m$. Bei der gleichen, unveränderten Synchronisierungsfrequenz Ω_2 ist im

nichtsynchronisierten Zustand, wenn die Frequenzabweichung außerhalb des Fangbereiches liegt, $U_2 = 0$ (die geringe Differenzfrequenz-Wechselspannung sei vernachlässigbar), so daß $\Omega_1 = \Omega_m$ und $\omega_{21} = \Omega_2 - \Omega_1 = \Omega_2 - \Omega_m = \omega_{1m}(\text{syn})$

ist. Das Vorzeichen von ω_{21} im nichtsynchronisierten Zustand ist bei gleichbleibender Synchronisierungsfrequenz Ω_2 gleich dem Vorzeichen der zur Synchronisation nötigen Verstimmung ω_{1m} des Oszillators. Um vollautomatisch Synchronisation zu erzwingen, besteht also die Aufgabe bei positiver Frequenzdifferenz ω_{21} eine positive verstimmungsabhängige Richtspannung zu gewinnen, um eine positive Nachstimmung ω_{1m} zu erreichen und umgekehrt.

Bei positivem ω_{21} vergrößert sich die positive Phasenabweichung $\varphi = +\omega_{21}t$ dauernd, deshalb weist in Bild 12 der Pfeil für $+\omega_{21}t$ nach rechts. Ist ω_{21} negativ, so werden die jeweiligen Spannungswerte der Phasenvergleichscharakteristik in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen, so daß sich die Differenzfrequenzspannung in ihrer Polung umkehrt. Dadurch ergibt sich das bereits erwähnte Kriterium für die Richtung der Frequenzabweichung, wenn die Phasenvergleichscharakteristik die Bedingung (B 2) erfüllt.

In Bild 12 ist unter der Phasenvergleichscharakteristik die Differenzfrequenzspannung für positive und negative Frequenzdifferenz aufgetragen. Bei unmittelbarer Gleichrichtung dieser abszissensymmetrischen Spannung entsteht eine Richtspannung, die sich bei Umkehrung der Spannung nicht ändert. Die unmittelbare Gleichrichtung führt also nicht zur Gewinnung einer verstimmungsabhängigen Richtspannung.

Es wurde bereits vorgeschlagen, die Differenzfrequenzspannung erst zu differenzieren und dann gleichzurichten [2]. Durch die Differenzierung wird die Spannung in eine ordinatensymmetrische Spannung der Art (19) umgeformt, bei der der Betrag des positiven und des negativen Spitzenwertes unterschiedlich ist, so daß bei der Gleichrichtung dieser Spannung eine von der Verstimmungsrichtung abhängende Richtspannung erzeugt wird. Dieses Verfahren hat jedoch große Nachteile, die seiner Anwendung im Wege stehen: Durch die Differenzierung wird die Wechselspannung so stark verkleinert, daß zwischen Differenzierglied und Gleichrichter ein zusätzlicher Verstärker vorgesehen werden muß. Außerdem ist durch die Differenzierung der Amplitudengang außerordentlich groß, nämlich direkt proportional der Differenzfrequenz.

4. Ein neues Verfahren zur Gewinnung einer verstimmungsabhängigen Richtspannung

4.1. Prinzip des Verfahrens

Zur Gewinnung einer verstimmungsabhängigen Richtspannung wird bei dem neuen Verfahren die Differenzfrequenzspannung durch Spitzenwertspeicherung umgeformt. Dieses Verfahren hat gegenüber Integrieren und Differenzieren folgende Vorteile:

1. Es tritt keine Teilung der Wechselspannung (z. B. durch Differenzieren) auf, so daß eine zusätzliche Verstärkung überflüssig ist.
2. Ein Gleichrichten der umgeformten Wechselspannung ist nicht erforderlich, da die verstimmungsabhängige Richtspannung unmittelbar durch die Umformung entsteht.
3. Durch das Koinzidenzverfahren wird ohne Mehraufwand eine zusätzliche Störfreiung erreicht.
4. Der Amplitudengang ist wesentlich geringer bzw. verschwindet ganz.

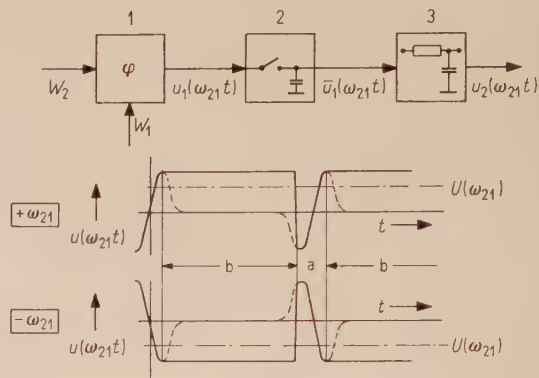


Bild 13. Umformung von $u(\omega_{21}t)$ durch Spitzenwertspeicherung.

Bild 13 zeigt an Hand des in Bild 12 gezeigten Beispiels das Prinzip dieses Umformungsverfahrens. In Bild 13 oben ist 1 die Phasenvergleichsschaltung. Sie erzeugt im nichtsynchronisierten Zustand eine differenzfrequente Wechselspannung $u_1(\omega_{21}t)$, wie sie z. B. in Bild 12 gezeigt wurde. Diese Spannung wird einem periodischen Schalter 2 zugeführt, der nur während eines Teiles der Periode geschlossen ist, nämlich während der in Bild 13 unten mit „a“ bezeichneten Zeit zwischen den beiden Extremwerten. Nach dem Erreichen des zweiten Extremwertes wird er wieder geöffnet. Dadurch wird die letzte Extremwertspannung mit einem hinter dem Schalter liegenden Kondensator gespeichert, bis der Schalter erneut geschlossen wird. Die an dem Speicherkondensator liegende Spannung $\bar{u}_1(\omega_{21}t)$ ist für positive und negative Differenzfrequenz ω_{21} als ausgezogene Linie wiedergegeben. Die strichpunktierte Linie entspricht sowohl dem Mittelwert von $\bar{u}_1(\omega_{21}t)$ als auch dem Mittelwert der gesiebten Spannung $u_2(\omega_{21}t)$, weil der Gleichspannungs-Übertragungsfaktor des Siebgliedes eins ist ($F(0) = 1$). Wenn auch durch die Siebung der Wechselspannungsanteil von $u_2(\omega_{21}t)$ sehr klein wird, so bleibt nach wie vor der Gleichspannungsanteil $U_1(\omega_{21}) = U_2(\omega_{21}) = U(\omega_{21})$ erhalten. Diese Spannung $U(\omega_{21})$ ist eine verstimmungsabhängige Richtspannung. Theoretisch ist ihre Amplitude unabhängig vom Betrag der Differenzfrequenz ω_{21} , praktisch ist jedoch eine Abhängigkeit vorhanden, die je nach den verwendeten Mitteln größer oder kleiner ist. Diese Amplitudenabhängigkeit ist folgendermaßen zu erklären: Ist die Differenzfrequenz sehr gering, so ist die Zeit b , während der der Schalter geöffnet

ist, relativ lang, so daß ein Teil der Ladung des Speicherkondensators z. B. über den Siebwiderstand des Siebgliedes abfließt. Dadurch verringert sich die Amplitude von $U(\omega_{21})$ bei niedriger Differenzfrequenz. Aber auch bei hoher Differenzfrequenz fällt sie ab, weil dann die Zeiten „a“, während denen der Speicherkondensator umgeladen wird, so kurz sind, daß er nicht voll aufgeladen werden kann. Um einen möglichst geringen Amplitudengang zu bekommen, muß man dafür sorgen, daß die Aufladezeitkonstante sehr klein und die Entladezeitkonstante sehr groß ist. Mit anderen Worten: Der Innenwiderstand der Phasenvergleichsschaltung soll sehr klein gegen den Siebwiderstand sein.

Bild 11 zeigt $U(\omega_{21})$ mit einem Amplitudengang, der im allgemeinen für die praktische Anwendung nicht störend ist.

Mit größerem Aufwand erreicht man eine wesentlich größere Amplitudenkonstanz und einen sehr steilen Sprung in die andere Polarität bei $\omega_{21} = 0$.

Ganz allgemein betrachtet verlangt das Prinzip lediglich eine Speicherung des letzten Spitzenwertes der differenzfrequenten Spannung $u_1(\omega_{21}t)$. Dazu ist grundsätzlich eine Vielzahl verschiedener Speicher geeignet, unter anderem auch ein bistabiler Multivibrator. Die Frequenzvergleichscharakteristik bei Verwendung eines bistabilen Multivibrators ist scheinbar ideal, denn ein Frequenzgang tritt nicht auf.

$$i_1(\omega_{21}t) \begin{cases} = 0 & \text{für } n\pi + \frac{a}{2} > \omega_{21}t > (n+1)\pi - \frac{a}{2} \\ = \frac{u_1(\omega_{21}) - \bar{u}_1(\omega_{21})}{R_i} & \text{für } n\pi - \frac{a}{2} < \omega_{21}t < n\pi + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (\text{T } 46)$$

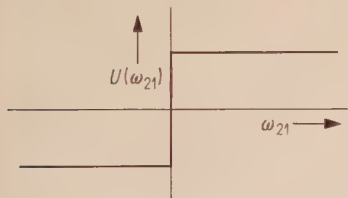


Bild 14. Frequenzvergleichscharakteristik bei Anwendung eines Multivibrators als Speicher.

Bild 14 zeigt die Frequenzvergleichscharakteristik bei Anwendung eines bistabilen Multivibrators. Diese Charakteristik hat aber einen entscheidenden Nachteil: Sie erfüllt nicht die Bedingung (B 42). Bei Verwendung eines bistabilen Multivibrators als Speicher bleibt auch nach dem Erreichen der Synchronisation die verstimmungsabhängige Richtspannung erhalten, so daß sich zu der phasenabhängigen Richtspannung $U(\varphi)$ eine Zusatzspannung addiert, deren Polarität davon abhängt, aus welcher Verstimmungsrichtung die Synchronisation erreicht wurde. Da von der Phasenvergleichsschaltung diese Spannung zur Aufrechterhaltung der Synchronisation kompensiert werden muß, gibt es zwei verschiedene stabile Phasenlagen. Um diesen unerwünschten Zustand zu verhindern, verlangt die Bedingung (B 42), daß $U(\omega_{21} = 0) = U(0)$ ist, d. h., die verstimmungsabhängige Richtspannung muß bei verschwin-

dender Differenzfrequenz selbst verschwinden. Es wird folglich ein Amplitudengang gefordert, der bei niedriger Differenzfrequenz abfällt und bei verschwindender Differenzfrequenz Null ist. Dabei ist unter „niedriger Differenzfrequenz“ eine solche zu verstehen, die innerhalb des Phasenfangbereiches liegt.

Aus dieser Überlegung folgt, daß nur Speicher mit beschränkter Speicherzeit angewendet werden dürfen. Ein Kondensator mit ohmschem Nebenschluß ist der einfachste Speicher dieser Art. Im folgenden soll deshalb, wie in Bild 13, nur der Kondensator als Speicher im Vordergrund der Betrachtungen stehen.

Die technische Bedingung bei Anwendung eines Speicherkondensators gemäß Bild 13 ist

$$T_1 \ll T_2. \quad (\text{T } 44)$$

Dabei ist T_1 die Aufladezeitkonstante, die durch den Speicherkondensator und den Innenwiderstand R_i der Phasenvergleichsschaltung gegeben ist, und T_2 die Entladezeitkonstante, die sich ebenfalls aus dem Speicherkondensator, dem ohmschen Nebenschluß und dem Siebwiderstand R_1 ergibt. Da der Kondensator in beiden Zeitkonstanten enthalten ist, ist Gl. (T 44) identisch mit

$$R_1 \ll R_i. \quad (\text{45})$$

Die Schalterbedingung läßt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned} & \text{für } n\pi + \frac{a}{2} > \omega_{21}t > (n+1)\pi - \frac{a}{2} \\ & \text{für } n\pi - \frac{a}{2} < \omega_{21}t < n\pi + \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (\text{T } 46)$$

Darin ist $i_1(\omega_{21}t)$ der Ausgangsstrom der Phasenvergleichsschaltung.

4.2. Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung in Zweiwegausführung

Die Bedingung (T 46) ist beim Vergleich impulsförmiger Spannungen auch ohne Schalter erfüllbar, wenn man dafür sorgt, daß nur bei Koinzidenz der Impulse die Phasenvergleichsschaltung Strom liefert. Man kann dieses ohne nennenswerten Mehraufwand erreichen, wenn man z. B. vorgespannte Gleichrichter in der Schaltung verwendet und die Vorspannung so groß wählt, daß sie von einem Impuls allein nicht überwunden werden kann. Die Vorspannung muß also größer als die Spitzenwerte einer der Impulsspannungen und kleiner als die Spitzenwerte der Summenspannung sein. Die größte verstimmungsabhängige Richtspannung erreicht man, wenn die Spitzenwerte beider Wechselfspannungen gleich groß sind ($\hat{W}_1 = \hat{W}_2$) und die Vorspannung etwa 1,5mal so groß wie der Spitzenwert einer der Spannungen ist.

Die Bedingung für die Spitzenwerte ist

$$\hat{W}_+ \begin{cases} = \hat{W}_1 = \hat{W}_2 & \text{für } n\pi + \frac{a}{2} > \omega_{21}t > (n+1)\pi - \frac{a}{2} \\ > \hat{W}_1 = \hat{W}_2 \\ (\text{maximal } \hat{W}_1 + \hat{W}_2) \end{cases} \quad \text{für } n\pi - \frac{a}{2} > \omega_{21}t > n\pi + \frac{a}{2}. \quad (\text{T } 47)$$

Dabei ist \hat{W}_+ der Spitzenwert der Summenspannung.

Die Bedingung für den Gleichrichter ist

$$\overline{W} = \begin{cases} 0 & \text{für } |W| < 1,5 |\hat{W}_1| \\ \sum \alpha_n W^n & \text{für } |W| > 1,5 |\hat{W}_1|. \end{cases} \quad (\text{T 48})$$

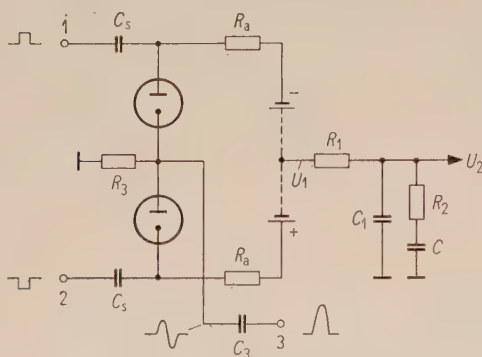


Bild 15. Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung in Zweiwegausführung.

Bild 15 zeigt eine Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung in Zweiwegausführung, die nach diesem Prinzip arbeitet und die sich sehr gut zur vollautomatischen Synchronisation der Horizontalablenkung in Fernsehempfängern eignet.

Den Klemmen 1 und 2 werden gegenpolig die Synchronisierimpulse zugeführt. An der Klemme 3 liegen die Vergleichsimpulse, die mit dem Kondensator C_3 und dem Widerstand R_3 differenziert werden, wodurch als Vergleichsspannung eine Doppelimpulsspannung entsteht, die die Bedingung (T 20) erfüllt. Die beiden Gleichrichterdioden sind über die beiden Ableitwiderstände R_a mit einer Batteriespannung vorgespannt. Die Doppelimpulsspannung wird den Dioden direkt zugeführt, während die Synchronisierimpulse über die Koppelkondensatoren C_s eingespeist werden. Dem Mittelabgriff der Batterie wird die verstimmungsabhängige bzw. phasenabhängige Richtspannung U_1 entnommen und dem Siebglied zugeführt, an dessen Ausgang die gesiebte Spannung U_2 erscheint.

Bild 16 zeigt ein praktisches Ausführungsbeispiel der Schaltung. Die Vorspannung wird hier auto-

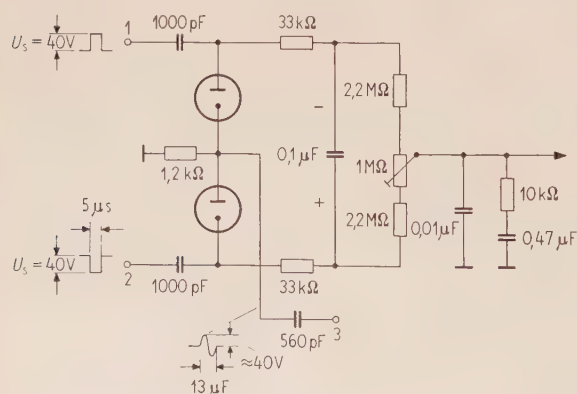


Bild 16. Praktisches Ausführungsbeispiel einer Zweiweg-Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung.

atisch mit Hilfe einer Kombination aus Kondensator ($0,1 \mu\text{F}$) und Widerständen ($2,2 \text{ M}\Omega + 1 \text{ M}\Omega + 2,2 \text{ M}\Omega$) aus dem mittleren Diodenstrom gewonnen. Der Trimmwiderstand ($1 \text{ M}\Omega$) dient zur Einstellung der Grundvorspannung der folgenden Nachstimmstufe und zum Ausgleich von Toleranzen. In ihrer Parallelschaltung — vom Abgriff des Trimmwiderstandes bis zu den beiden Enden des $0,1 \mu\text{F}$ -Kondensators — arbeiten die Widerstände zusätzlich als Längswiderstand des Siebgliedes. Die Koppelkondensatoren für die Synchronisierimpulse dienen außerdem als Speicherkondensatoren (C_s) für den Frequenzvergleich. Ihre Größe, die entscheidenden Einfluß auf die Form der Frequenzvergleichscharakteristik hat, muß deshalb dieser Aufgabe entsprechen. Sind die Speicherkondensatoren zu groß, so geht die verstimmungsabhängige Richtspannung bei hoher Differenzfrequenz zu schnell auf Null zurück, da bei erhöhter Umladegeschwindigkeit zu große Kondensatoren nicht voll umgeladen werden. Wählt man sie kleiner (bei konstantem R_1/R_s), so verschieben sich die beiden Extremwerte der Charakteristik zu höheren Differenzfrequenzen, so daß unter Umständen bei geringer Differenzfrequenz die verstimmungsabhängige Richtspannung nicht ausreicht, um den Phasenfangbereich zu erreichen. Man kann jedoch durch Vergrößern des Siebwiderstandes die Entladezeitkonstante wieder auf den alten Wert erhöhen, wodurch bei niedriger Differenzfrequenz wieder etwa der ursprüngliche Verlauf der Charakteristik hergestellt wird. Die Frequenzvergleichscharakteristik der Schaltung wurde bereits in Bild 11 gezeigt.

Die automatische Erzeugung der Vorspannung aus dem mittleren Diodenstrom hat den Vorteil, daß die Vorspannung sich selbsttätig der Amplitude der Wechselspannungen anpaßt.

Eine zusammenfassende Funktionserklärung der Schaltung soll mit Hilfe des Bildes 17 erfolgen. In diesem Bild wird die Summenspannung und die Differenzspannung für verschiedene Phasen gezeigt. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wurden die Wechselspannungen idealisiert (scharfkantig) gezeichnet. Bild 17a zeigt die Verhältnisse bei Sollphase. Die Summenspannung setzt sich zusammen aus der doppelimpulsförmigen Vergleichsspannung und den positiven, von links unten nach rechts oben schraffierten Synchronisierimpulsen. Die Differenzspannung setzt sich aus der Vergleichsspannung und den negativen, von links oben nach rechts unten schraffierten Synchronisierimpulsen zusammen. Die beiden waagerechten, gestrichelten Linien geben die Diodenvorspannung an. Diodenstrom fließt erst nach Überschreitung dieser Spannung. Bei Sollphase fließt durch beide Dioden ein gleichgroßer Strom (eingeregelter Zustand), wenn der Gesamtwechselspannung keine Gleichspannung überlagert ist, wenn also die Richtspannung Null ist. Bei geringen Abweichungen von der Sollphase entsteht, wie bei gewöhnlichen Phasenvergleichsschaltungen, eine phasenabhängige Richtspannung, deren Polarität von der Richtung der Phasenabweichung abhängt.

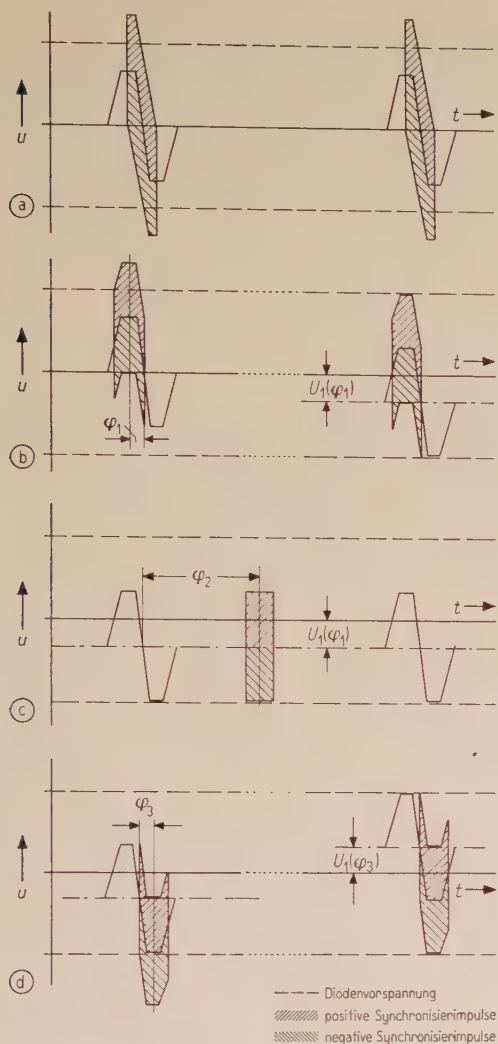


Bild 17. Die Summen- und Differenzspannung für verschiedene Phasenlagen.

- (a) Sollphase ($\varphi = 0$).
 (b) Phasenabweichung ($\varphi = \varphi_1$), bei der die größte negative Richtspannung $U_1(\varphi_1)$ erzeugt wird.
 (c) Große Phasenabweichung ($\varphi = \varphi_2$). Es fließt kein Diodenstrom, die Richtspannung $U_1(\varphi_1)$ wird gespeichert.
 (d) Phasenabweichung ($\varphi = \varphi_3$), bei der die größte positive Richtspannung $U_1(\varphi_3)$ erzeugt wird.

Im nichtsynchronisierten Zustand werden nacheinander alle Phasen durchlaufen. Bild 17b zeigt die Phase φ_1 , bei der die maximale Richtspannung $U_1(\varphi_1)$ entsteht. In diesem Zustand fließt durch eine der beiden Dioden ein Strom, bis durch Potentialverschiebung (rechts im Bild) der eingeregelter Zustand erreicht wird, bei dem (im Gegensatz zur Sollphase) durch keine der Dioden ein Strom fließt. Nach einiger Zeit wird die in Bild 17c gezeigte Phase durchlaufen, bei der ebenfalls kein Diodenstrom fließt, so daß die bei φ_1 erreichte Richtspannung $U_1(\varphi_1)$ beibehalten wird. Wird schließlich die in Bild 17d gezeigte Phase erreicht, so fließt wieder ein Diodenstrom, durch den die Richtspannung ihre Polarität umkehrt und den entgegengesetzten Maximalwert annimmt. Diese umgekehrte

Polarität wird jedoch nur kurze Zeit erzeugt, denn unmittelbar danach wird wieder die Sollphase (Bild 17a) und φ_1 (Bild 17b) durchlaufen.

Auf diese Weise entsteht eine differenzfrequente Wechselspannung $\bar{u}_1(\omega_{21}t)$, wie sie in Bild 13 für die beiden Verstimmungsrichtungen gezeigt wurde.

4.3. Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen in Einwegausführung

Die technischen Bedingungen für Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen in Einwegausführung erhält man, wenn man die technischen Bedingungen für Einweg-Phasenvergleichsschaltungen (T20), (T27), (T28) und (T34) mit denen für die Erzeugung einer verstimmungsabhängigen Richtspannung mittels eines Speicherkondensators und vorgespannter Gleichrichter (T44), (T47) und (T48) zusammenfaßt.

Die Bedingungen (T20) und (T27) für die beiden Wechselspannungen sind nur dann mit der Bedingung (T47) vereinbar, wenn man zwei Doppelimpulsspannungen mit untereinander gleichen (bzw. nahezu gleichen) Spitzenwerten verwendet. Über das Verhältnis der Amplituden und über die grundsätzliche Form der beiden Wechselspannungen ist damit bereits verfügt. Um trotzdem die Bedingung (T34) zu erfüllen, die verlangt, daß die beiden Wechselspannungen unterschiedliche Spektren haben, müssen sich ihre Impulszeiten unterscheiden. Die Bedingung (T44) ist unabhängig und leicht erfüllbar.

Die Art des erforderlichen Gleichrichters ergibt sich, wenn man (T28) und (T48) zusammenfaßt:

$$\bar{W} = \begin{cases} 0 & \text{für } |W| < 1,5 |\hat{W}_1| \\ \sum \alpha_{2n-1} W^{2n-1} & \text{für } |W| > 1,5 |\hat{W}_1|. \end{cases} \quad (49)$$

Gl. (49) verlangt als Gleichrichter ein polarisationsunabhängiges, nichtlineares Element mit einem Sperrbereich für Spannungen unter $1,5 |\hat{W}_1|$. Ein Schaltelement, welches diese Bedingung erfüllt, ist z. B. eine symmetrische Glimmstrecke. Eine Glimmstrecke ist jedoch nur für relativ niedrige Frequenzen brauchbar. Für höhere Frequenzen kann man die Reihenschaltung einer Zenerdiode mit einer Batterie mit der halben Zenerspannung als „polarisationsunabhängiges nichtlineares Element“ verwenden.

Bild 18 zeigt eine Schaltung dieser Art. Es ist die einfachste Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung, die alle Qualitätsbedingungen erfüllt.

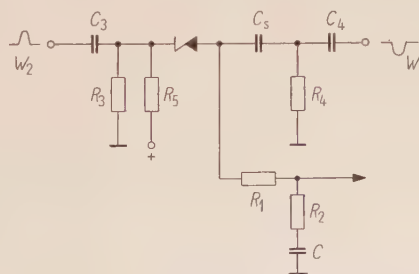


Bild 18. Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung in Einwegschaltung mit Zenerdiode.

Darin ist C_3 , R_3 das RC -Glied zur Differenzierung der Spannung W_2 und C_4 , R_4 ist das Differenzierglied für die Spannung W_1 . Die Widerstände R_5 und R_3 bilden einen Spannungsteiler zur Erzeugung einer Gleichspannung, deren Größe mit der halben Zenerspannung der Zenerdiode übereinstimmt. C_8 ist der Speicherkondensator und zusätzlich der Koppelkondensator für die Wechselspannung W_1 . Das RC -Glied R_1 , R_2 , C ist schließlich das Siebglied für die phasen- und verstimmungsabhängige Richtspannung. Die Impulsspannungen sind gegenpolig, weil an der Zenerdiode die Differenzspannung liegt. Die Wechselspannung an der Zenerdiode bei Sollphase ist dadurch etwa doppelt so groß wie die einzelnen Doppelimpulsspannungen, wie Gl. (T47) verlangt.

Wenn allein der Vorteil der fehlenden Gegentaktansteuerung ausschlaggebend ist, ist es selbstverständlich auch möglich als polarisationsunabhängiges, nichtlineares Element die Parallelschaltung zweier gegenpoliger, vorgespannter Dioden zu verwenden, wobei die Vorspannung auch automatisch aus dem Diodenstrom mit einem RC -Glied gewonnen werden kann.

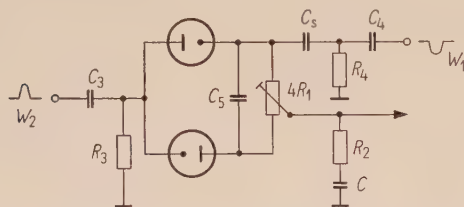


Bild 19. Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung in Einwegschaltung mit zwei Dioden.

Bild 19 zeigt eine solche Schaltung. Darin haben alle Elemente, deren Funktion die gleiche ist wie in Bild 18, auch die gleiche Bezeichnung. C_5 ist der Ladekondensator für die Vorspannung. Der Trimmwiderstand ist viermal so groß wie der Siebwiderstand R_1 in Bild 18, da die Parallelschaltung seiner beiden Hälften (bei Mittelstellung des Schleifers) zusätzlich als Siebwiderstand dient.

4.4. Andere Schaltungsvarianten

Die einfachsten Schaltungen lassen sich, wie gezeigt wurde, mit einer doppelimpulsförmigen Vergleichsspannung realisieren. Besteht die Notwendigkeit, eine Impulsspannung mit einer sägezahnförmigen Spannung zu vergleichen, so kann die Bedingung (T46) dadurch erfüllt werden, daß die Impulsspannung eine Koinzidenzschaltung durchläuft, der außerdem eine Vergleichsimpulsspannung zugeführt wird, die z. B. durch Differenzieren der Sägezahnspannung gewonnen wird.

In anderen Fällen kann es erwünscht sein, daß die phasenabhängige und die verstimmungsabhängige Richtspannung an getrennten Ausgängen erscheinen. Diese Bedingung ist nicht erfüllbar, wenn dieselben Gleichrichter zur Erzeugung beider Richtspannungen herangezogen werden. Eine recht einfache Schaltung zur Erzeugung getrennter Richt-

spannungen zeigt Bild 20. In diesem Beispiel wird eine gewöhnliche Phasenvergleichsschaltung verwendet, die die Bedingungen (B2), (B5), (B6), (T47) erfüllt. Sie hat z. B. zur Erfüllung von Gl. (T47) eine Phasenvergleichscharakteristik, wie Bild 12 zeigt. Dann gilt für den Strom $i_1(\omega_{21}t)$ durch die

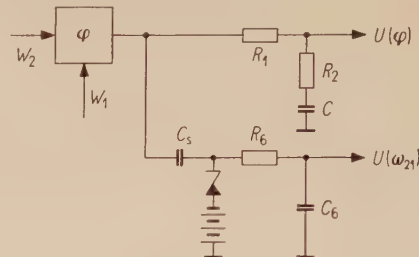


Bild 20. Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung mit einem Ausgang für die phasenabhängige und einem getrennten Ausgang für die verstimmungsabhängige Richtspannung.

Zenerdiode in Bild 20 die Bedingung (T46), so daß sich an dem Speicherkondensator C_8 eine verstimmungsabhängige Richtspannung ausbilden kann, wenn außerdem die Bedingung (T44) erfüllt wird. Die Zenerdiode ist zur Symmetrierung ihrer Kennlinie (bezogen auf Massepotential) mit einer Spannung entsprechend der halben Zenerspannung vorgespannt. Die beiden Richtspannungen können nachträglich addiert werden, indem man den Fußpunkt der Phasenvergleichsschaltung nicht an Masse, sondern an den Siebkondensator C_6 für die verstimmungsabhängige Richtspannung legt. Am Ausgang für die phasenabhängige Richtspannung erscheint dann die Summen-Richtspannung. Die verstimmungsabhängige Richtspannung steht dann immer noch unabhängig für andere Zwecke zur Verfügung.

5. Die Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung im Regelkreis einer Nachlaufsynchroniserschaltung

5.1. Der Regelkreis im nichtsynchronisierten Zustand

Bei Anwendung einer Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung im Regelkreis einer Nachlaufsynchroniserschaltung interessieren für den nichtsynchronisierten Zustand vor allem die Fragen:

- a) Auf welche Frequenz wird der nachzustimmende Oszillator allein durch die verstimmungsabhängige Richtspannung nachgestimmt?
- b) Wie groß ist der Frequenzfangbereich?
- c) Wie groß ist die Fangzeit?

Zur Beantwortung der ersten Frage stehen die Nachstimmcharakteristik und die Frequenzvergleichscharakteristik, also zwei graphisch gegebene Funktionen, zur Verfügung. Die zwei Unbekannten ω_{1m} und $U(\omega_{1m})$ werden deshalb ebenfalls am einfachsten auf graphischem Wege durch Aufsuchen des Schnittpunktes der beiden Funktionen, gesucht. Die graphische Lösung ist jedoch erst dann möglich, wenn beide Funktionen das gleiche Argument ha-

ben. Die Nachstimmcharakteristik ist eine Funktion $U(\omega_{1m}) = U(\Omega_1 - \Omega_m)$, die Frequenzvergleichscharakteristik dagegen eine Funktion $U(\omega_{21}) = U(\Omega_2 - \Omega_1)$. Wird die Frequenzvergleichscharakteristik an der Ordinate gespiegelt, so entsteht die Funktion $U(-\omega_{21}) = U(\Omega_2 - \Omega_1)$. Wird diese Funktion schließlich um den festen Betrag $\Omega_2 - \Omega_m$ in Abszissenrichtung verschoben, so ist

$$U(-\omega_{21} + \Omega_2 - \Omega_1) = U(\Omega_1 - \Omega_m) = U_F(\omega_{1m}).$$

Durch den Index F wird die überführte Frequenzvergleichscharakteristik $U_F(\omega_{1m})$ von der Nachstimmcharakteristik $U(\omega_{1m})$ unterschieden. Nach dieser Überführung auf das gemeinsame Argument ω_{1m} ist der Schnittpunkt der beiden Funktionen $U(\omega_{1m})$ und $U_F(\omega_{1m})$ unmittelbar die Lösung der Frage a.

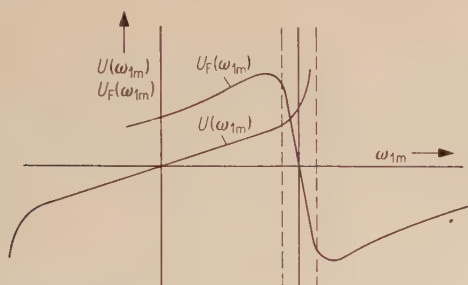


Bild 21. Graphische Ermittlung des stabilen Punktes beim Frequenzvergleich.

Bild 21 zeigt ein Beispiel. Die Verstimmung ist in diesem Beispiel wesentlich größer als der Phasenfangbereich, der Schnittpunkt liegt jedoch innerhalb des Phasenfangbereiches. Die verstimmungsabhängige Richtspannung stimmt also den Oszillator so weit nach, daß Synchronisation eintritt. Im Bild ist der Phasenfangbereich durch gestrichelte Linien begrenzt. Die Messung des Phasenfangbereiches einer Phasenvergleichsschaltung ist relativ einfach, die Berechnung dagegen ist unmöglich. Ein graphisches Lösungsverfahren wurde von R. URTEL erarbeitet und in [3] von H. LUTZ veröffentlicht.

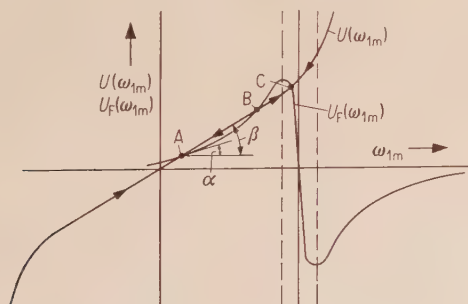


Bild 22. Entstehung zweier stabiler Punkte und eines labilen Punktes.

Bild 22 zeigt den Fall, daß die verstimmungsabhängige Richtspannung zu klein ist und außerdem so verläuft, daß bei der in diesem Bild angenommenen Frequenzverstimmung $\Omega_2 - \Omega_m$ drei Schnittpunkte entstehen.

Sind α und β die Neigungswinkel der Frequenzvergleichscharakteristik und der Nachstimmcharakteristik im Schnittpunkt, so ist das System

$$\begin{aligned} &\text{bei } \alpha < \beta \text{ stabil} \\ &\text{und bei } \alpha > \beta \text{ labil.} \end{aligned} \quad (50)$$

Somit sind in Bild 21 der Punkt B labil und die Punkte A und C stabil. Die Pfeile auf der Nachstimmcharakteristik weisen in die Richtung, in die der Oszillator durch die verstimmungsabhängige Richtspannung verstimmt wird. Synchronisation tritt nur dann ein, wenn zu Beginn des Regelvorganges die Oszillatorfrequenz rechts vom labilen Schnittpunkt B liegt.

Die Größe des Frequenzfangbereiches (Frage b), also des Verstimmungsbereiches $\Omega_2 - \Omega_m$, in dem mit Sicherheit Synchronisation eintritt, findet man, indem man die Charakteristiken nach beiden Seiten soweit gegeneinander verschiebt, daß sie gerade noch nicht in einem labilen Punkt tangieren und der stabile Schnittpunkt noch innerhalb des Phasenfangbereiches liegt und die zur Synchronisation erforderliche Richtspannung noch kleiner als die größte Phasenvergleichsrichtspannung ist.

Die Richtspannungsergiebigkeit der Vergleichsschaltung beim Frequenzvergleich ist entscheidend für die Größe des Frequenzfangbereiches. Will man einen möglichst großen Frequenzfangbereich erreichen, so muß die größte, verstimmungsabhängige Richtspannung etwa so groß sein wie die Richtspannung, die die Nachstimmereinrichtung an der Grenze des Nachstimbereiches benötigt. Da die größte phasenabhängige Richtspannung bei Anwendung eines Speicherkondensators zwangsläufig merklich größer ist als die größte verstimmungsabhängige Richtspannung, steht bei einer derartigen Dimensionierung eine ungewöhnlich große phasenabhängige Richtspannung zur Verfügung, eine Tatsache, die bei der Dimensionierung des Siebgliebes berücksichtigt werden muß (siehe Abschnitt 5.2).

Nach diesen Überlegungen bezüglich des Frequenzfangbereiches soll nun die Frage c, die Frage nach der Einfangszeit, behandelt werden. Hierzu ist ebenfalls die Darstellung in Bild 21 geeignet. Während des Fangvorganges ist die am Eingang des Siebgliebes liegende Spannung U_1 identisch mit der verstimmungsabhängigen Richtspannung $U_F(\omega_{1m})$ und die am Ausgang liegende Spannung U_2 identisch mit der der Nachstimmereinrichtung zugeführten Richtspannung $U(\omega_{1m})$.

Ist das Siebglied ein einfacher RC-Tiefpaß, so ist

$$U_2 = \frac{1}{C} \int i_2 dt,$$

wenn i_2 der Strom durch den Siebwiderstand R_1 ist. Es ist also

$$i_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_1},$$

somit ist

$$U_2 = \frac{1}{R_1 C} \int (U_1 - U_2) dt, \quad (51)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{R_1 C} (U_1 - U_2). \quad (52)$$

dU_2/dt ist die Umladegeschwindigkeit, mit der der Siebkondensator umgeladen wird. Sie bestimmt die Dauer des Fangvorganges und hängt ab von der Größe der Zeitkonstante des Siebgliedes und vom jeweiligen senkrechten Abstand der beiden Charakteristiken ($U_1 - U_2$).

Wenn man für eine graphische Näherungslösung die Differenzgleichung

$$\frac{\Delta U_2}{\Delta t} = \frac{1}{R_1 C} (U_1 - U_2)$$

verwendet, so ist für gleichbleibende Zeitdifferenzen Δt

$$\Delta U_2 = (U_1 - U_2)/c \quad (c = \text{const}). \quad (53)$$

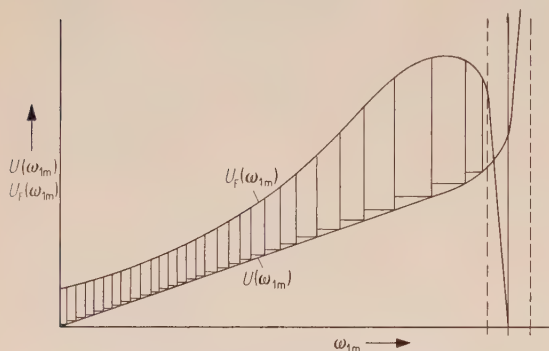


Bild 23. Graphische Ermittlung der Fangzeit.

Bild 23 zeigt einen Kurvenausschnitt, bei dem die graphische Lösung durchgeführt wird. Teilt man von der Ausgangsposition A ausgehend den senkrechten Kurvenabstand im Verhältnis 1 : c, z. B. 1 : 10, so ist dies der zum ersten Zeitschritt Δt gehörende Spannungsschritt ΔU . Die Waagerechte durch diesen Teilungspunkt schneidet die Nachstimmcharakteristik bei der diesem Spannungszuwachs zugeordneten Frequenz. Wenn man von diesem neuen Punkt auf der Nachstimmcharakteristik ausgeht und dasselbe wiederholt, so findet man den nächsten, zum gleichen Zeitraum Δt gehörenden Frequenzschritt usw. Werden die Schritte zu groß, so kann man die Zeitschritte halbieren, indem man vorübergehend c verdoppelt.

Auf diese Weise erhält man eine sehr anschauliche Darstellung des Zeitverlaufs beim Nachstimmvorgang. Die Fangzeit findet man schließlich durch die Beziehung

$$t_f = n \frac{R_1 C}{c}. \quad (54)$$

Darin ist n die Zahl der Schritte vom Ausgangspunkt des Nachstimmvorganges bis zum Erreichen des Phasenfangesbereiches. Bei Verwendung eines dreigliedrigen oder viergliedrigen Siebgliedes (Bild 25) ist für den nichtsynchronisierten Zustand R_2 und C_1 vernachlässigbar, so daß Gl. (54) auch dort gültig ist.

5.2. Der Regelkreis im synchronisierten Zustand

Wie bereits im letzten Abschnitt angedeutet, müssen die Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung und die Nachstimmrichtung so dimensioniert werden, daß die Regelspannungsergiebigkeit der Vergleichsschaltung beim Frequenzvergleich so groß und der Regelspannungsbedarf der Nachstimmrichtung so klein ist, daß in jedem Fall Synchronisation erreicht wird. Dadurch werden zwangsläufig auch die Regelspannungsergiebigkeit der Vergleichsschaltung beim Phasenvergleich und damit die Phasenvergleichsteilheit S_φ und die Nachstimmteilheit S_ω erhöht, so daß die Regelteilheit des Regelsystems

$$S_\varphi S_\omega = + |S| \quad (B24)$$

erheblich größer als bei herkömmlichen Nachlauf-synchronisierschaltungen ohne Frequenzvergleich ist.

Die allgemeine Berechnung des Regelkreises beim Phasenvergleich wurde von H. LUTZ [3] durchgeführt. In folgendem wird die Berechnung des Synchronisierregelkreises zum Zwecke der Dimensionierung des Regelsiebgliedes einer Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung unter spezieller Berücksichtigung der Verhältnisse bei besonders hoher Regelteilheit behandelt. Es zeigt sich, daß bei sehr hoher Regelteilheit die Berechnung sehr vereinfacht werden kann, so daß es möglich ist, für alle (periodischen und aperiodischen) Einschwingfälle sehr einfache Dimensionierungsformeln ((103), (104)) für das Siebglied aufzustellen.

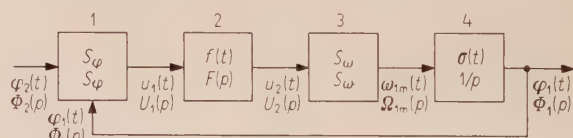


Bild 24. Der Regelkreis beim Phasenvergleich.

Bild 24 zeigt den Regelkreis beim Phasenvergleich. Die Führungsgröße ist die Phase $\varphi_2(t)$ der Synchronisierwechselspannung. Die Regelgröße ist die Phase $\varphi_1(t)$ der Oszillatorspannung. Der Regler des Systems besteht aus der Phasenvergleichsschaltung und dem Siebglied. Der Übertragungsfaktor der Phasenvergleichsschaltung ist die Phasenvergleichsteilheit S_φ . Sie ergibt sich aus

$$u_1(t) = [\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] S_\varphi \quad (55)$$

$$\text{bzw.} \quad U_1(p) = [\Phi_2(p) - \Phi_1(p)] S_\varphi. \quad (56)$$

Die erste Gleichung ist die Originalfunktion und die zweite die durch Laplacetransformation gewonnene Bildfunktion mit der Variablen p . Die Spannung $u_1(t)$ ist die Verbindungsgröße zwischen der Phasenvergleichsschaltung und dem Siebglied. Die Übertragungsgröße des Siebgliedes ist $F(p)$. Sie folgt aus

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (57)$$

bzw. $U_2(p) = U_1(p) F(p)$ (58)

mit $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. (59)

Die gesiebte Spannung $u_2(t)$ ist die Stellgröße, die der Regelstrecke zugeführt wird. Die Regelstrecke besteht aus der Nachstimmereinrichtung und dem Oszillator. Der Übertragungsfaktor der Nachstimmereinrichtung ist die Nachstimmteilheit S_ω . Sie folgt aus

$$\omega_{1m}(t) = u_2(t) S_\omega \quad (60)$$

bzw. $\Omega_{1m}(p) = U_2(p) S_\omega$. (61)

Die Frequenzabweichung $\omega_{1m}(t)$ ist die Verbindungsgröße zwischen Nachstimmereinrichtung und Oszillator. Die Übertragungsfunktion des Oszillators ist schließlich $1/p$, denn

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \omega_{1m}(\tau) d\tau = \int_0^t \omega_{1m}(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau \quad (62)$$

bzw. $\Phi_1(p) = \Omega_{1m}(p)/p$. (63)

Dabei ist $\sigma(t)$ der Einheitssprung.

Die Netzfunktion $A(p)$ des Regelsystems ist das Produkt aller Übertragungsfaktoren bzw. Übertragungsfunktionen des Regelkreises. Im vorliegenden Fall ist

$$A(p) = \frac{S}{p} F(p). \quad (64)$$

Darin ist S die in Gl. (23) definierte Regelteilheit des Regelkreises.

Das Nyquist-Stabilitätskriterium sagt für den Spezialfall $p = j\omega$ aus: Ein Regelsystem ist stabil, wenn $A(j\omega)$ den Punkt (-1) links von der Durchlaufrichtung ($\omega = -\infty \rightarrow \omega = +\infty$) liegen läßt. Diese Bedingung ist bei positiver Regelteilheit S und Verwendung geeigneter Siebglieder erfüllt (deshalb Gl. (B 24)).

Das Siebglied des Regelsystems muß aber nicht nur so dimensioniert werden, daß die Stabilität gewährleistet ist, sondern darüber hinaus soll der Einschwingvorgang aperiodisch sein und im Idealfall entsprechend dem aperiodischen Grenzfall verlaufen, weil beim aperiodischen Grenzfall, bei einer vorbestimmten Rauschbandbreite [3] und somit einer vorgegebenen Störfreiheit, die kürzeste Einschwingzeit erreicht wird.

Die Netzfunktion liefert die Beziehung zwischen der Regelgröße und der Differenz zwischen Regel- und Führungsgröße

$$\Phi_1(p) = A(p) [\Phi_2(p) - \Phi_1(p)]. \quad (65)$$

Für die Untersuchung des Einschwingverhaltens der Regelgröße nach einer Störung, bzw. nach einem Sprung der Führungsgröße, benötigt man aber die

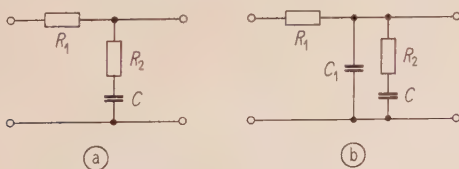


Bild 25. Geeignete Regelspannungssiebglieder; (a) dreigliedrig, (b) viergliedrig.

Übertragungsfunktion $N(p)$ des geschlossenen Regelsystems, die die Abhängigkeit der Regelgröße von der Führungsgröße angibt,

$$\Phi_1(p) = N(p) \Phi_2(p) \quad (66)$$

mit $N(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)}$. (67)

Um die oben gestellte Bedingung für das Einschwingverhalten zu erfüllen, muß, abhängig von der Art des Oszillators, ein dreigliedriges oder ein viergliedriges Siebglied verwendet werden. Bild 25 a zeigt ein dreigliedriges, Bild 25 b ein viergliedriges Siebglied. Ein dreigliedriges Siebglied ist völlig ausreichend, wenn die aus Gl. (60) und (62) folgende Bedingung

$$\varphi_1(t) = S_\omega \int_0^t u_2(\tau) d\tau \quad (T 68)$$

erfüllt wird. Bei richtiger Dimensionierung erfüllt ein Sinusoszillator mit Blindstufe als Nachstimmereinrichtung diese Bedingung. Spannungsabhängige Oszillatoren, bei denen man auf Grund ihrer Spannungsabhängigkeit keine getrennte Nachstimmereinrichtung anwenden muß, führen bei einem Spannungssprung nicht nur einen Frequenzsprung, sondern außerdem einen Phasensprung φ_u aus. Für sie gilt

$$\varphi_1(t) = \varphi_u[u_2(t)] + S_\omega \int_0^t u_2(\tau) d\tau. \quad (69)$$

Bei derartigen Oszillatoren, z.B. Multivibratoren, Sperrschwingern usw., muß ein viergliedriges Siebglied angewendet werden.

Die Übertragungsfunktion eines dreigliedrigen Siebgliedes ist

$$F_3(p) = \frac{1 + p C R_2}{1 + p C (R_1 + R_2)}. \quad (70)$$

Mit den Substitutionen

$$R = R_1 + R_2, \quad \varrho = R_2/R, \quad T = RC \quad (71), (72), (73)$$

ist die Übertragungsfunktion des Siebgliedes

$$F_3(p) = \frac{1 + p \varrho T}{1 + p T}. \quad (74)$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion des Regelsystems

$$N_3(p) = \frac{(1 + p \varrho T) S/T}{p^2 + p(\varrho S + 1/T) + S/T}. \quad (75)$$

Die Übertragungsfunktion des viergliedrigen Siebgliedes ist mit den Substitutionen (71) bis (73)

$$F_4(p) = \frac{1 + p \varrho T}{p^2 T C_1 R_1 \varrho + p T + p C_1 R_1 + 1}. \quad (76)$$

Mit der Substitution

$$\kappa = C_1 R_1 / T \quad (77)$$

findet man

$$F_4(p) = \frac{1 + p \varrho T}{p^2 T^2 \kappa \varrho + p T (1 + \kappa) + 1}. \quad (78)$$

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion des

Regelsystems (79)

$$N_4(p) = \frac{(1 + p \varrho T) S/T}{p^3 T \kappa \varrho + p^2 (1 + \kappa) + p (\varrho S + 1/T) + S/T}.$$

Die beiden Übertragungsfunktionen des Regelsystems enthalten in Gl. (75) und (79) anschauliche Größen der Schaltungsdimensionierung.

Bei den Substitutionen

$$\frac{S}{T(1 + \kappa)} = \omega_0^2, \quad (80)$$

$$\frac{\varrho S}{1 + \kappa} = 2 D \omega_0 \quad (81)$$

stehen auf der linken Seite Größen der Schaltungsdimensionierung und auf der rechten Seite Kenngrößen des Übertragungs- bzw. Einschwingverhaltens, nämlich Dämpfung D und Resonanzfrequenz ω_0 .

Wendet man diese Substitutionen auf Gl. (79) an, so folgt für die Anwendung eines viergliedrigen Siebgliebes

$$N_4(p) = \frac{\omega_0^2 + p 2 D \omega_0}{\frac{p^3 2 D \kappa}{\omega_0 (1 + \kappa)} + p^2 + p \left(2 D \omega_0 + \frac{\omega_0^2}{S} \right) + \omega_0^2}.$$

Ist in dieser Gleichung $\kappa = 0$, so ergibt sich die Übertragungsfunktion des Regelsystems bei Anwendung eines dreigliedrigen Siebgliebes.

Das Übertragungs- und Einschwingverhalten hängt im wesentlichen nur von den Kenngrößen ω_0 und D ab. Aber auch die Schaltungsgrößen S und κ haben zum Teil einen nicht durch eine normierte Größe ersetzbaren Einfluß. Bei den beschriebenen Phasen- und Frequenzvergleichsschaltungen ist S jedoch so groß, daß der Fehler nur außerordentlich gering ist, wenn man statt mit $N_4(p)$ mit der Größe

$$N_{4\infty}(p) = \lim_{S \rightarrow \infty} N_4(p) \quad (83)$$

rechnet. Es ist

$$N_{4\infty}(p) = \frac{\omega_0^2 + p 2 D \omega_0}{\frac{p^3 2 D \kappa}{(1 + \kappa) \omega_0} + p^2 + p 2 D \omega_0 + \omega_0^2}. \quad (84)$$

Der Fehler ist kleiner als 2,5%, wenn $S > 20 \omega_0/D$ ist und kleiner als 1%, wenn $S > 50 \omega_0/D$ ist.

Für den Spezialfall $p = j\omega$ ist der Nenner von Gl. (84)

$$\begin{aligned} \frac{-j \omega^3 2 D \kappa}{(1 + \kappa) \omega_0} - \omega^2 + j \omega 2 D \omega_0 + \omega_0^2 = \\ = (\omega_0^2 - \omega^2) + j \omega 2 D \left[\omega_0 - \frac{\omega^2}{(1 + \kappa) \omega_0} \right]. \end{aligned}$$

Darin ist $\omega_0 \gg \frac{\omega^2}{\omega_0} \frac{\kappa}{1 + \kappa}$ für $\omega < \omega_0$, (85)

wenn $\kappa \ll 1$ ist.

Mit anderen Worten: Ist $\kappa \ll 1$, so ist das Glied $p^3 2 D \kappa / (1 + \kappa) \omega_0$ in (84) innerhalb des Frequenzbereiches $0 < \omega < \omega_0$ vernachlässigbar, so daß man statt mit $N_{4\infty}(p)$ mit $N_{3\infty}(p)$ rechnen darf. Es ist

$$N_{3\infty}(p) = \frac{\omega_0^2 + p 2 D \omega_0}{p^2 + p 2 D \omega_0 + \omega_0^2}. \quad (86)$$

Muß ein viergliedriges Siebglied angewendet werden, so ist die unerwünschte Spannungsabhängigkeit $\varphi_u[u_2(t)]$ in Gl. (69) praktisch völlig verschwunden, wenn $\kappa = 0,05$ ist.

Einen festen, allgemeingültigen Zusammenhang zwischen einer Dauer im Zeitbereich und einer Bandbreite im Frequenzbereich gibt es nicht. Trotzdem kann man sagen, daß obige Vernachlässigung, die unter der Bedingung $0 < \omega < \omega_0$ erlaubt ist, auch bei der Berechnung des Einschwingvorganges gestattet ist, wenn man die Rechnung auf Zeiten $t > 0,5 \cdot 1/\omega_0$ beschränkt. Wie sich später zeigen wird, ist der Verlauf des Einschwingvorganges in dem Zeitbereich $0 < t < 1/\omega_0$ nicht interessant, so daß diese Einschränkung nicht stört.

Die Übertragungsfunktion (86) des Regelsystems hat zwei Pole p_1' und p_2' sowie eine Nullstelle p_1 :

$$\begin{aligned} p_{1,2}' &= -D \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1} = \\ &= -D \omega_0 \pm j \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \end{aligned} \quad (87)$$

$$p_1 = -\omega_0 / 2 D. \quad (88)$$

Bild 26 zeigt die Pole und die Nullstelle für den periodischen Fall ($D < 1$) und Bild 27 für den aperiodischen Fall ($D > 1$).

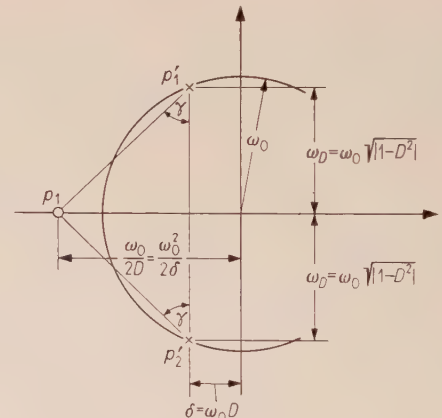


Bild 26. Pole und Nullstelle der Übertragungsfunktion beim periodischen Fall ($D < 1$).

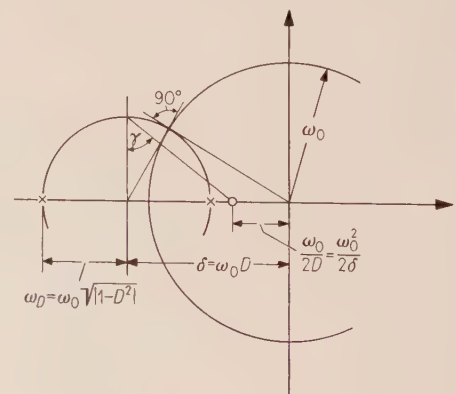


Bild 27. Pole und Nullstelle der Übertragungsfunktion beim aperiodischen Fall ($D > 1$).

Die Gewichtsfunktion $n_{3\infty}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{N_{3\infty}(p)\}$ für die verschiedenen Einschwingfälle

Für $D < 1$:

$$n_{3\infty}(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-D^2} t + \gamma) \quad (89)$$

$$\text{mit} \quad \gamma = \arccot \frac{\sqrt{1-D^2}}{\frac{1}{2D} - D} \quad (90)$$

Mit den Substitutionen

$$\delta = D\omega_0, \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1-D^2} \quad (91), (92)$$

ist für $D < 1$

$$n_{3\infty}(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_D} e^{-\delta t} \sin(\omega_D t + \gamma) \quad (93)$$

Die Größen δ und ω_D sind Bild 26 bzw. 27 direkt zu entnehmen; δ ist der Realteil und $\pm \omega_D$ der Imaginärteil der Pole. γ ist ebenfalls direkt ablesbar.

Für $D > 1$:

$$n_{3\infty}(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{D^2-1}} e^{-D\omega_0 t} \sinh(\omega_0 \sqrt{D^2-1} t - j\gamma) \quad (94)$$

$$\text{mit} \quad -j\gamma = \operatorname{arccoth} \frac{\sqrt{D^2-1}}{D - \frac{1}{2D}} \quad (95)$$

Unter Verwendung von

$$|\gamma| = \arccot \left| \frac{\sqrt{1-D^2}}{D - \frac{1}{2D}} \right|$$

kann man für Gl. (94) auch schreiben

$$n_{3\infty}(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_D} e^{-\delta t} \sinh(\omega_D t + |\gamma|) \quad (96)$$

($|\gamma|$ siehe Bild 27).

Für $D = 1$:

$$n_{3\infty}(t) = \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} \quad (97)$$

Die Gewichtsfunktion gestattet mit Hilfe des Faltungsintegrals die direkte Berechnung der Regelgröße $\varphi_1(t)$ bei beliebiger Funktion der Führungsgröße $\varphi_2(t)$:

$$\varphi_1(t) = \int_0^t \varphi_2(\tau) n_{3\infty}(t-\tau) d\tau \quad (98)$$

Ist z. B.

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0, \end{cases} \quad (99)$$

führt also $\varphi_2(t)$ einen Einheitssprung durch, so ist für den anzustrebenden aperiodischen Grenzfall ($D = 1$)

$$\varphi_1(t) = h(t) = 1 + \omega_0 t e^{-\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t} \quad (100)$$

Diese Antwort des Systems auf die Erregung durch den Einheitssprung zeigt Bild 28. Man sieht, daß der Endwert eins, dem sich die Funktion asymptotisch nähert, bei $\omega_0 t = 1$ geschnitten wird.

Die Anstiegszeit kann man leicht definieren durch

$$T_a = 1/\omega_0 \quad (101)$$

Die Bedingung für die Vernachlässigung des Gliedes $p^3 2D\kappa/(1+\kappa)\omega_0$ in Gl. (84) verlangt im Zeitbereich

$$t > 0,5 \cdot 1/\omega_0 = 0,5 T_a \quad (102)$$

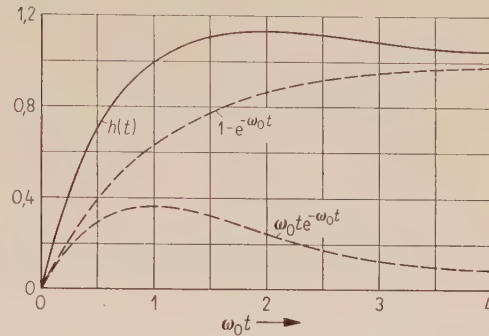


Bild 28. Die Antwort des Regelsystems auf die Erregung durch den Einheits-Phasensprung.

Auf die Berechnung des Verlaufs von $t = 0$ bis $t = 0,5 T_a$ kann man gern verzichten, da erst das Verhalten ab $0,5 T_a$ interessant wird, denn erst in diesem Bereich zeigt sich, ob der Einschwingvorgang aperiodisch oder periodisch erfolgt und wie groß z. B. das Überspringen ist.

Zur Berechnung des Siebgliebes benötigt man nur die beiden Substitutionen (80) und (81), die die Verknüpfung der Kenngrößen D und ω_0 mit den Schaltungsgrößen S , T , κ , ϱ liefern. Bei gegebener Regelsteilheit S und mit vorbestimmtem κ , z. B. $\kappa = 0,05$, findet man für viergliedrige Siebglieder

$$\varrho = \frac{R_2}{R_1} = \frac{2D\omega_0(1+\kappa)}{S} = \frac{2D(1+\kappa)}{S T_a} \quad (103)$$

$$T = (R_1 + R_2)C = \frac{S}{\omega_0^2(1+\kappa)} = \frac{S T_a^2}{1+\kappa} \quad (104)$$

Für dreigliedrige Siebglieder ist $\kappa = 0$ zu setzen.

Soll bei einer Vergrößerung der Regelsteilheit S das Einschwingverhalten unverändert bleiben, so muß wegen Gl. (103) R_1 proportional vergrößert werden. Wegen Gl. (104) muß auch T proportional vergrößert werden. Ist $R_1 \gg R_2$, ist die erforderliche Vergrößerung von T bereits durch die Vergrößerung von R_1 erfüllt. Für eine sehr große Regelsteilheit S ist also ein sehr großer Siebwiderstand R_1 erforderlich. Diese Forderung deckt sich mit der aus einem ganz anderen Grunde gestellten Bedingung (45), so daß hier kein Kompromiß erforderlich ist. Außerdem erkennt man, daß eine Vergrößerung von κ sich wie eine Verkleinerung von S auswirkt.

6. Anhang

a) Beweis zu Abschnitt 1.1

Es wird behauptet, daß $U(\varphi) = -U(-\varphi)$ ist, was identisch ist mit

$$2U(\varphi) = -2U(-\varphi), \quad (A 1)$$

wenn in einer Zweiweg-Phasenvergleichsschaltung die Gleichrichter gleichartig sind und wenn W_1 eine Funktion der Art (15) und W_2 eine Funktion der Art (19) ist.

Nun ist wegen Gl. (8)

$$2U(\varphi) = U_{11}(\varphi) + U_{12}(\varphi) \quad (\text{A } 2)$$

$$\text{und } -2U(-\varphi) = -U_{11}(-\varphi) - U_{12}(-\varphi).$$

$$\text{Da aber } U_{11}(\varphi) \neq -U_{11}(-\varphi) \quad (\text{A } 3)$$

$$\text{und } U_{12}(\varphi) \neq -U_{12}(-\varphi)$$

ist, ist Gl. (A 1) nur erfüllbar, wenn

$$U_{11}(\varphi) = -U_{12}(-\varphi) \quad (\text{A } 4)$$

$$\text{und } U_{12}(\varphi) = -U_{11}(-\varphi)$$

ist. Gl. (A 4) verlangt, daß $U_{11}(\varphi)$ durch 180°-Drehung des Koordinatensystems um den Ursprung in $U_{12}(\varphi)$ übergeht. Wegen der gegenpolig betriebenen Gleichrichter geht die Kennlinie des einen Gleichrichters ebenfalls durch 180°-Drehung in die Kennlinie des anderen Gleichrichters über. Die in Gl. (A 4) verlangte Bedingung ist unter dieser Voraussetzung nur erfüllbar, wenn das gleiche Gesetz auch für die den beiden Gleichrichtern zugeführten Wechselspannungen gilt:

$$W_+(\Omega_1 t; \varphi) = -W_-(-\Omega_1 t; -\varphi). \quad (\text{A } 5)$$

Nun ist aber

$$W_+(\Omega_1 t; \varphi) = W_1(\Omega_1 t) + W_2(\Omega_1 t + \varphi) \quad (\text{A } 6)$$

und

$$\begin{aligned} -W_-(-\Omega_1 t; -\varphi) &= -W_1(-\Omega_1 t) + \\ &+ W_2(-\Omega_1 t - \varphi). \end{aligned} \quad (\text{A } 7)$$

Gl. (A 5) verlangt, daß Gl. (A 6) und (A 7) untereinander gleich sind. Das ist nur möglich, wenn

$$W_1(\Omega_1 t) = -W_1(-\Omega_1 t) \quad (\text{A } 8)$$

$$\text{und } W_2(\Omega_1 t + \varphi) = W_2(-\Omega_1 t - \varphi) \quad (\text{A } 9)$$

ist. Gl. (A 8) und (A 9) bestätigen die Behauptung, denn in Gl. (A 8) ist W_1 eine Funktion der Art (15) und in Gl. (A 9) ist W_2 eine Funktion der Art (19).

b) Beweis zu Abschnitt 2

Es wird behauptet, daß

$$U(\varphi) = -U(-\varphi) \quad (\text{A } 10)$$

ist, wenn in einer Einweg-Phasenvergleichsschaltung die Gleichrichterkennlinie eine Funktion der Art (15) ist und wenn außerdem sowohl W_1 als auch W_2 Funktionen der Art (15) sind.

Gl. (A 10) verlangt, daß durch 180°-Drehung des Koordinatensystems die Funktion $U(\varphi)$ unverändert bleibt. Auch die Kennlinie des Gleichrichters bleibt bei 180°-Drehung des Koordinatensystems unverändert. Unter dieser Voraussetzung ist Gl. (A 10) nur erfüllbar, wenn die dem Gleichrichter zugeführte Wechselspannung ebenfalls diesem Gesetz gehorcht:

$$W_+(\Omega_1 t; \varphi) = -W_+(-\Omega_1 t; -\varphi). \quad (\text{A } 11)$$

Nun ist aber

$$W_+(\Omega_1 t; \varphi) = W_1(\Omega_1 t) + W_2(\Omega_1 t + \varphi) \quad (\text{A } 12)$$

und

$$\begin{aligned} -W_+(-\Omega_1 t; -\varphi) &= -W_1(-\Omega_1 t) - \\ &- W_2(-\Omega_1 t - \varphi). \end{aligned} \quad (\text{A } 13)$$

Gl. (A 11) verlangt, daß Gl. (A 12) und (A 13) untereinander gleich sind. Das ist nur dann möglich, wenn

$$W_1(\Omega_1 t) = -W_1(-\Omega_1 t) \quad (\text{A } 14)$$

$$\text{und } W_2(\Omega_1 t + \varphi) = -W_2(-\Omega_1 t - \varphi) \quad (\text{A } 15)$$

ist. Gl. (A 14) und (A 15) bestätigen die Behauptung, denn in Gl. (A 14) und (A 15) sind W_1 und W_2 Funktionen der Art (15).

Schrifttum

- [1] RICHMAN, D., Color-carrier reference phase synchronization accuracy in NTSC color television. Proc. Inst. Radio Engrs. **42** [1954], 106–133.
- [2] British Patent 652, 122: Phase control apparatus especially for television synchronization.
- [3] LUTZ, H., Die Bewertung der Güte der Horizontalsynchronisation von Fernsehempfängern. A. E. Ü. **11** [1957], 461–470.
- [4] KAUFMANN, H., Dynamische Vorgänge in linearen Systemen der Nachrichten- und Regelungstechnik. R. Oldenbourg Verlag, München 1959.
- [5] GASSMANN, G.-G., Phasen- und Frequenzvergleichsschaltung. SEL Techn. Mitt. T 0922–2 (März 1960).

Die Aufspaltung des elektrokinetischen Leistungstheorems

VON WILLI RIEDLER

Mitteilung aus dem Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Hochschule Wien

(A.E.U. 15 [1961], 377 — 385; eingegangen am 6. April 1961)

DK 621.385.6

Es werden Bedingungen abgeleitet, die allgemeine, dreidimensionale Elektronenströmungen erfüllen müssen, um bei periodischer Aussteuerung mit mehreren inkommensurablen Frequenzen und großen Amplituden eine strenge Trennung von Gleichenergiestromung und Wechselenergiestromung zu ermöglichen.

Der sich dabei ergebende Ausdruck für die Wechselenergiestromung läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen in Leistungstheoreme aufspalten, die sich als verallgemeinerte MANLEY-ROWE-Beziehungen der Netzwerktheorie deuten lassen.

Sowohl die Trennung von Gleich- und Wechselenergiestromung als auch die Aufspaltung in die genannten Leistungstheoreme sind insbesondere dann möglich, wenn der Wirbel des verallgemeinerten Impulses verschwindet.

Für den allgemeinen Fall, bei dem der Wirbel des verallgemeinerten Impulses von Null verschieden ist, wird die Möglichkeit untersucht, die Leistungsbeziehungen in Leistungs-Erhaltungssätze umzuformen. Es gelingt dies unter Heranziehung von Variablen, die in der ansonsten verwendeten Eulerschen Betrachtungsweise nicht enthalten sind und daher „fremd“ genannt werden. Für kleine Amplituden (Störungsrechnung) wird ein Leistungstheorem abgeleitet, das mit Hilfe einer „fremden“ Variablen in einen Kleinsignal-Erhaltungssatz übergeführt werden kann, den bereits BOBROFF und HAUS angegeben haben.

Conditions are derived, which must be fulfilled by general, three-dimensional electron flows in order to allow a separation of the dc energy flow and ac energy flow for multiple-periodic excitation with several incommensurable frequencies and large amplitudes.

If certain conditions are met, the ac term can be split up into power theorems, which can be interpreted as generalized MANLEY-ROWE relations of network theory.

In particular, the separation of the dc and ac energy flow as well as the splitting into the above mentioned power theorems are possible in particular, if the curl of the canonical momentum vanishes.

For the general case with non-zero curl of the canonical momentum, the possibility of transforming the power relations into power-conservation theorems is considered. This can be done by introducing variables that are not contained in the otherwise used Eulerian system of variables and therefore are called „outside“ variables. For the small-signal case (perturbation theory) a power theorem is derived, which can be transformed into a small-signal conservation theorem already given by BOBROFF and HAUS, by use of an „outside“ variable.

1. Einleitung

Durch Verwendung eines Fourieransatzes für Strahl- und Feldgrößen konnte KOGELNIK [8] nachweisen, daß sich die Stromung von Gleichenergie und die Stromung von Wechselenergie in Elektronenstrahlen, die gewissen einschränkenden Voraussetzungen genügen, getrennt verfolgen lassen. Seine Ergebnisse beziehen sich auf beliebig große Aussteuerung mit einer Frequenz.

Für den Fall einer ebenen, eindimensionalen Elektronenströmung wies GRAU [7] in einer Arbeit über parametrische Elektronenstrahlverstärker nach, daß auch bei Aussteuerung mit mehreren inkommensurablen Frequenzen eine Trennung von Gleich- und Wechselenergiestromung möglich ist und sich darüber hinaus der Term für die Wechselenergiestromung in Gleichungen aufspalten läßt, die den MANLEY-ROWE-Beziehungen entsprechen.

Aufgabe der vorliegenden Arbeit soll es sein, zu untersuchen, welchen Voraussetzungen allgemeine, dreidimensionale Elektronenströmungen genügen müssen, um derartige Aufspaltungen des Ausdrucks für die Energiestromung zuzulassen. Die Rechnung wird für Aussteuerung mit beliebig vielen inkommensurablen Frequenzen durchgeführt.

Ferner soll, ausgehend von den allgemeinen Leistungsbeziehungen, untersucht werden, inwieweit es möglich ist, diese in Leistungs-Erhaltungssätze umzuformen. Dazu wird es notwendig sein, verschiedene Möglichkeiten der mathematischen Beschreibung von Vorgängen in Elektronenströmungen kurz zu betrachten.

2. Voraussetzungen

Die Geschwindigkeit der Elektronen $\vec{v}(\vec{r}, t)$ sei klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Die Elektronen befinden sich im Vakuum, die Gültigkeit der Maxwell-Lorentzschen Gleichungen wird vorausgesetzt.

Wir gehen aus von der Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

wobei $\vec{J} = \rho \vec{v}$ (2)

die Konvektionsstromdichte bedeutet und der Kraftgleichung

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\eta(\vec{E} + \mu_0[\vec{v} \vec{H}]). \quad (3)$$

Aus dem Poyntingschen Energiesatz der Maxwell'schen Theorie gewinnt man durch Definition der kinetischen Leistungsdichte

$$\vec{S}_k = -\frac{1}{2\eta} \vec{J}(\vec{v}^2) \quad (4)$$

und der kinetischen Energiedichte

$$w_k = -\frac{1}{2\eta} (\vec{J} \vec{v}) \quad (5)$$

die Beziehung

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = -(\vec{E} \vec{J}) = -\operatorname{div} \vec{S}_k - \frac{\partial w_k}{\partial t} \quad (6)$$

und daraus für den zeitlichen Mittelwert

$$\operatorname{div} (\vec{S} + \vec{S}_k) = 0. \quad (7)$$

Der Poyntingsche Vektor \vec{S} ist dabei gegeben durch

$$\vec{S} = [\vec{E} \vec{H}], \quad (8)$$

die elektromagnetische Energiedichte durch

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2) + \frac{\mu_0}{2} (\vec{H}^2). \quad (9)$$

Betrachtet werden Vorgänge, die mit q inkommensurablen Frequenzen periodisch sind (Kreisfrequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ mit $0 < q < \infty$). Vorausgesetzt wird, daß alle skalaren Größen und die Komponenten der Vektoren in Fourierreihen entwickelbar sind.

Eine Vektorgröße \vec{A} läßt sich dann als

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{n_i} \vec{A}_{n_i}(\vec{r}) \exp j \sum_i n_i \omega_i t \quad (10)$$

darstellen, wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_q=-\infty}^{\infty} = \sum_{n_i}, \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^q = \sum_i, \quad (12)$$

$$\vec{A}_{n_1 n_2 \dots n_q} = \vec{A}_{n_i}, \quad (13)$$

insbesondere

$$\vec{A}_{00 \dots 0} = \vec{A}_0. \quad (14)$$

Da nur rein reelle Vorgänge betrachtet werden, gilt

$$\vec{A}_{n_i} = \vec{A}_{-n_i}^*. \quad (15)$$

Als weitere Abkürzung wird geschrieben:

$$\sum_{n_i} \vec{A}_{n_i} - \vec{A}_0 = \sum_{n_i}' \vec{A}_{n_i}. \quad (16)$$

Es ist zweckmäßig, für die Dichte des Konvektionsstromes den Ansatz

$$\vec{J} = \sum_{n_i} \delta_{n_i} \vec{J}_{n_i} \exp j \sum_i n_i \omega_i t$$

zu treffen mit

$$\delta_{n_i} = \begin{cases} -1 & \text{für } n_i = 0 \\ +1 & \text{für } n_i \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

($n_i = 0$ bedeutet $n_1 = n_2 = \dots = n_q = 0$.)

3. Trennung von Gleich- und Wechselenergieströmung

Zufolge der Vektorbeziehung

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\vec{v}^2) - [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{v}] \quad (18)$$

läßt sich die Kraftgleichung (3) umformen in

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\vec{v}^2) = -\eta \vec{E} + \frac{1}{m} [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{p}]. \quad (19)$$

\vec{p} ist der verallgemeinerte Impuls, gegeben durch

$$\vec{p} = m \vec{v} - e \vec{A}, \quad (20)$$

worin \vec{A} das Vektorpotential bedeutet, welches durch

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{H} \quad (21)$$

definiert ist.

Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, wird die Vektorgroße

$$\vec{K} = [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{p}] \quad (22)$$

eingeführt.

Damit erhält man nach innerer Multiplikation mit \vec{J}_0 aus Gl. (19)

$$j \left(\vec{J}_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} (\vec{J}_0 \operatorname{grad} (\vec{v}^2)) = -\eta (\vec{J}_0 \vec{E}) + \frac{1}{m} (\vec{J}_0 \vec{K}). \quad (23)$$

Mit dem Ansatz (10) lautet diese Gleichung

$$j \left\{ \vec{J}_0 \sum_{n_i} \left(\sum_i n_i \omega_i \right) \vec{v}_{n_i} \exp j \sum_i n_i \omega_i t \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \vec{J}_0 \operatorname{grad} \sum_{n_i} \exp j \left(\sum_i n_i \omega_i \right) t \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \right\} = -\eta \left(\vec{J}_0 \sum_{n_i} \vec{E}_{n_i} \exp j \sum_i n_i \omega_i t \right) + \frac{1}{m} \left(\vec{J}_0 \sum_{n_i} \vec{K}_{n_i} \exp j \sum_i n_i \omega_i t \right) \quad (24)$$

$$\text{mit} \quad \vec{K}_{n_i} = \sum_{m_i} [\vec{v}_{m_i} \operatorname{rot} \vec{p}_{m_i-n_i}^*]. \quad (25)$$

Durch zeitliche Mittelwertbildung geht Gl. (24) über in

$$\frac{1}{2} (\vec{J}_0 \operatorname{grad} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i}^*)) = -\eta (\vec{J}_0 \vec{E}_0) + \frac{1}{m} (\vec{J}_0 \vec{K}_0) \quad (26)$$

$$\text{mit} \quad \vec{K}_0 = [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{p}] = \sum_{m_i} [\vec{v}_{m_i} \operatorname{rot} \vec{p}_{m_i}^*]. \quad (27)$$

Auf Grund der Vektorbeziehung

$$(\vec{b} \operatorname{grad} a) = \operatorname{div} (a \vec{b}) - a \operatorname{div} \vec{b} \quad (28)$$

gelangt man zu

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\vec{J}_0 \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i}^*) \right) - \frac{1}{2} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i}^*) \operatorname{div} \vec{J}_0 = -\eta (\vec{J}_0 \vec{E}_0) + \frac{1}{m} (\vec{J}_0 \vec{K}_0). \quad (29)$$

$$\text{Wegen} \quad \operatorname{div} \vec{J}_0 = 0 \quad (30)$$

$$\text{reduziert sich der Ausdruck zu} \quad (31)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{2\eta} \vec{J}_0 \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i}^*) \right) = -(\vec{J}_0 \vec{E}_0) + \frac{1}{e} (\vec{J}_0 \vec{K}_0).$$

Aus Gl. (4) gewinnt man die kinetische Leistungsdichte in Fourierdarstellung

$$\vec{S}_k = -\frac{1}{2\eta} \sum_i \left\{ \exp j \left(\sum_i v_i \omega_i \right) t \cdot \sum_{n_i} \sum_{m_i} \delta_{n_i} \vec{J}_{n_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i+n_i-v_i}^*) \right\} \quad (32)$$

und unter Verwendung von Gl. (15) deren zeitlichen Mittelwert

$$\begin{aligned} \bar{\vec{S}}_k &= \vec{S}_{k=} + \vec{S}_{k\sim} = \\ &= -\frac{1}{2\eta} \sum_{n_i} \sum_{m_i} \delta_{n_i} \vec{J}_{n_i}^* (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*). \end{aligned} \quad (33)$$

Der Gleichanteil lautet

$$\vec{S}_{k=} = \frac{1}{2\eta} \vec{J}_0 \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i}^*), \quad (34)$$

der Wechselanteil

$$\vec{S}_{k\sim} = -\frac{1}{2\eta} \sum_{n_i}' \sum_{m_i} \vec{J}_{n_i}^* (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*). \quad (35)$$

Aus Gl. (6) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{S} &= \operatorname{div} (\vec{S}_= + \vec{S}_{\sim}) = \\ &= -\sum_{n_i} \delta_{n_i} (\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\operatorname{div} \vec{S}_= = (\vec{E}_0 \vec{J}_0), \quad (37)$$

$$\operatorname{div} \vec{S}_{\sim} = -\sum_{n_i}' (\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*). \quad (38)$$

Aus Gl. (31) erhält man somit unter Beachtung der Gl. (7), (27), (34) und (37) die Beziehungen für Gleich- und Wechselenergiestromung in der Form

$$\operatorname{div} (\vec{S}_= + \vec{S}_{k=}) = \frac{1}{e} (\vec{J}_0 [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{p}]) \quad (39)$$

$$\text{und} \quad \operatorname{div} (\vec{S}_{\sim} + \vec{S}_{k\sim}) = -\frac{1}{e} (\vec{J}_0 [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{p}]). \quad (40)$$

Die Gleichenergiestromung und die Wechselenergiestromung lassen sich im allgemeinen Fall nicht getrennt verfolgen. Über welche Terme die gegenseitige Verkopplung stattfindet, läßt sich besser aus einer etwas anderen Schreibweise dieser Beziehungen ersehen.

Zweckmäßigerweise wird dazu das verallgemeinerte kinetische Potential

$$V = \frac{1}{2\eta} (\vec{v}^2) \quad (41)$$

eingeführt. Mit dem dazugehörigen sinngemäßen Ansatz

$$V = -\sum_{n_i} \delta_{n_i} V_{n_i} \exp j \sum_i n_i \omega_i t, \quad (42)$$

$$V_0 = \frac{1}{2\eta} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i}^*), \quad (43)$$

$$V_{n_i} = -\frac{1}{2\eta} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \quad (44)$$

kann man die Gl. (39) und (40) überführen in

$$(\vec{E}_0 \vec{J}_0) + \operatorname{div} (V_0 \vec{J}_0) = \frac{1}{e} \left(\vec{J}_0 \sum_{m_i} [\vec{v}_{m_i} \operatorname{rot} \vec{p}_{m_i}^*] \right), \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n_i}' \{ (\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) - \operatorname{div} (V_{n_i} \vec{J}_{n_i}) \} &= \\ &= \frac{1}{e} \left(\vec{J}_0 \sum_{m_i} [\vec{v}_{m_i} \operatorname{rot} \vec{p}_{m_i}^*] \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Es zeigt sich also, daß bei Aussteuerung mit beliebig vielen Frequenzen eine Umwandlung von kinetischer Gleichleistung in elektromagnetische Gleichleistung, und vollkommen unabhängig davon eine Umwandlung von kinetischer Wechselleistung in elektromagnetische Wechselleistung nur dann stattfindet, wenn die Größe

$$M = -(\vec{J}_0 [\vec{v} \operatorname{rot} \vec{p}]) \quad (47)$$

verschwindet.

Insbesondere trifft dies für jenen Fall zu, bei dem die drei Vektoren \vec{J}_0 , \vec{v} und $\operatorname{rot} \vec{p}$ komplanar sind, worauf bereits KÖNIG [9] hingewiesen hat.

Ein weiterer Sonderfall sind Elektronenströmungen, bei denen die Elektronen zeitlich konstanten, eindeutigen Bahnen folgen. Für diese gilt

$$[\vec{J}_0 \vec{v}] = 0 \quad (48)$$

und somit wieder

$$M = 0. \quad (49)$$

M nimmt ferner den Wert Null an, wenn der Rotor des verallgemeinerten Impulses verschwindet ($\operatorname{rot} \vec{p} = 0$, „wirbelfreie Elektronenströmung“). Auf diesen Fall wird weiter unten im Zusammenhang mit der Besprechung der Clebsch-Variablen noch näher eingegangen.

4. Aufspaltung des Satzes für die Wechselenergiestromung

Ausgehend von der Kraftgleichung (19) sollen nun Beziehungen für die Wechselleistungsgrößen aufgestellt werden, die, sofern die Elektronenströmung gewisse Bedingungen erfüllt, eine Form annehmen, die man als Verallgemeinerungen der aus der Netzwerktheorie bekannten MANLEY-ROWE-Gleichungen auffassen kann.

Die Fourierkomponente mit den Indizes n_i aus Gl. (19) lautet

$$\begin{aligned} j \left(\sum_i n_i \omega_i \right) \vec{v}_{n_i} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) &= \\ &= -\eta \vec{E}_{n_i} + \frac{1}{m} \vec{K}_{n_i}. \end{aligned} \quad (50)$$

Durch innere Multiplikation mit $\vec{J}_{n_i}^*$ und Umformung nach Gl. (28) erhält man

$$\begin{aligned} j \left(\sum_i n_i \omega_i \right) (\vec{v}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) + \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \vec{J}_{n_i}^* \right) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \operatorname{div} \vec{J}_{n_i}^* &= \\ &= -\eta (\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) + \frac{1}{m} (\vec{K}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*). \end{aligned} \quad (51)$$

Multiplikation mit

$$\frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i}, \quad 1 \leq j \leq q$$

liefert nach Summation über alle Indizes n_i mit Ausnahme von $n_i = 0$ und Umordnung

$$\begin{aligned} \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} \left\{ \eta(\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \vec{J}_{n_i}^* \right) \right\} = \\ = \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \operatorname{div} \vec{J}_{n_i}^* - \right. \\ \left. - j \left(\sum_i n_i \omega_i \right) (\vec{v}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) + \frac{1}{m} (\vec{K}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) \right\}. \end{aligned} \quad (52)$$

Ähnlich wie in [7] kann das identische Verschwinden des Ausdrucks

$$\begin{aligned} N = \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \operatorname{div} \vec{J}_{n_i}^* - \right. \\ \left. - j \left(\sum_i n_i \omega_i \right) (\vec{v}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

nachgewiesen werden.

Mit Hilfe der aus den Gl. (1) und (2) gewonnenen Beziehungen

$$\operatorname{div} \vec{J}_{n_i}^* = j \left(\sum_i n_i \omega_i \right) \varrho_{n_i}^* \quad (54)$$

und

$$\vec{J}_{n_i}^* = \sum_{m_i} \varrho_{m_i}^* \vec{v}_{m_i-n_i} \quad (55)$$

kann man Gl. (53) umformen in

$$N' = -2jN =$$

$$\begin{aligned} = \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} \left\{ \left(\sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \right) \left(\sum_i n_i \omega_i \right) \varrho_{n_i}^* - \right. \\ \left. - 2 \left(\sum_i n_i \omega_i \right) \left(\vec{v}_{n_i} \sum_{m_i} \varrho_{m_i}^* \vec{v}_{m_i-n_i} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Da Glieder mit $n_i = 0$ wegen des Faktors n_j nicht auftreten können, kann man den symbolischen Strich im Summationszeichen weglassen und erhält

$$N' = A - 2B = \quad (57)$$

$$= \sum_{n_i} \sum_{m_i} \{ n_j (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \varrho_{n_i}^* - 2 \varrho_{m_i}^* (\vec{v}_{n_i} \vec{v}_{m_i-n_i}) \}$$

mit

$$A = \sum_{n_i} \sum_{m_i} n_j (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \varrho_{n_i}^* \quad (58)$$

und

$$B = \sum_{n_i} \sum_{m_i} n_j (\vec{v}_{n_i} \vec{v}_{m_i-n_i}) \varrho_{m_i}^*. \quad (59)$$

B läßt sich durch den Übergang

$$m_i - n_i \rightarrow k_i, \quad m_i \rightarrow l_i$$

und den nachfolgenden Übergang

$$k_i \rightarrow m_i, \quad l_i \rightarrow n_i$$

unter Beachtung von Gl. (15) in zwei Teile aufspalten:

$$B = C - D, \quad (60)$$

$$C = \sum_{n_i} \sum_{m_i} n_j (\vec{v}_{m_i-n_i}^* \vec{v}_{m_i}) \varrho_{n_i}^*, \quad (61)$$

$$D = \sum_{n_i} \sum_{m_i} n_j (\vec{v}_{m_i-n_i} \vec{v}_{n_i}) \varrho_{m_i}^*. \quad (62)$$

Dabei wurden in D noch die Indizes m_i und n_i vertauscht.

Insgesamt gilt

$$N' = A - B - C + D, \quad (63)$$

was aber auf Grund der Gl. (58), (59), (60) und (62) identisch verschwindet. Somit ist

$$N \equiv 0 \quad (64)$$

bewiesen.

Gl. (52) reduziert sich auf Grund der Identität (64) zu

$$\begin{aligned} \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} \left\{ \eta(\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\sum_{m_i} (\vec{v}_{m_i} \vec{v}_{m_i-n_i}^*) \vec{J}_{n_i}^* \right) \right\} = \\ = \frac{1}{m} \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} (\vec{K}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*). \end{aligned} \quad (65)$$

Wegen Gl. (25) und (44) kann man statt dessen auch

$$\begin{aligned} \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} \left\{ (\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) - \operatorname{div} (V_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) \right\} = \\ = \frac{1}{e} \sum_{n_i}' \sum_{m_i} \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} (\vec{J}_{n_i}^* [\vec{v}_{m_i} \operatorname{rot} \vec{p}_{m_i-n_i}^*]) \end{aligned} \quad (66)$$

schreiben.

Man hat es hier mit einem System von q Gleichungen zu tun ($1 \leq j \leq q$). Bei Verschwinden der rechten Seiten geht dieses System über in

$$\sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} \{ (\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) - \operatorname{div} (V_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) \} = 0. \quad (67)$$

Es sind dies Gleichungen, die man als verallgemeinerte MANLEY-ROWE-Beziehungen für dreidimensionale Elektronenströmungen bezeichnen kann. Sie haben insbesondere für zwei Klassen von Elektronenströmungen Gültigkeit:

a) $[\vec{J}_0 \vec{v}] = 0$; die Elektronen bewegen sich längs zeitlich konstanten, eindeutigen Bahnen.

Aus dieser Bedingung folgt nämlich

$$[\vec{J}_0 \vec{v}_{n_i}] = 0, \quad (68)$$

d. h. es sind die Fourierkoeffizienten \vec{v}_{n_i} mit beliebigen Indizes parallel zu \vec{J}_0 und untereinander. Das Tripelprodukt unter den Summenzeichen der rechten Seite von Gl. (66) läßt sich umstellen:

$$(\vec{J}_{n_i}^* [\vec{v}_{m_i} \operatorname{rot} \vec{p}_{m_i-n_i}^*]) = (\operatorname{rot} \vec{p}_{m_i-n_i}^* [\vec{J}_{n_i}^* \vec{v}_{m_i}]) \quad (69)$$

Mit Gl. (55) wird das äußere Produkt daraus zu

$$[\vec{J}_{n_i}^* \vec{v}_{m_i}] = \sum_{v_i} \varrho_{v_i}^* [\vec{v}_{v_i - n_i} \vec{v}_{m_i}], \quad (70)$$

was aber hier wegen

$$[\vec{v}_{\mu_i} \vec{v}_{v_i}] = 0 \quad (71)$$

verschwindet.

b) $[\vec{v} \text{ rot } \vec{p}] = 0$. Als Sonderfall sind hier wieder Elektronenströmungen mit verschwindendem Wirbel des verallgemeinerten Impulses ($\text{rot } \vec{p} = 0$) mit eingeschlossen.

Aus

$$[\vec{v} \text{ rot } \vec{p}] = \vec{K} = 0 \quad (72)$$

folgt

$$\vec{K}_{n_i} = \sum_{m_i} [\vec{v}_{m_i} \text{ rot } \vec{p}_{m_i - n_i}^*] = 0, \quad (73)$$

womit sämtliche rechte Seiten des Gleichungssystems (66) verschwinden.

Das Gleichungssystem (66) läßt sich in eine übersichtlichere Form bringen, wenn man die Anteile von \vec{S}_{\sim} und $\vec{S}_{k\sim}$, die formal von den einzelnen Kombinationsfrequenzen herrühren, explizit einführt:

$$\text{div } \vec{S}_{\sim n_i} = -(\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*), \quad (74)$$

$$\vec{S}_{k\sim n_i} = V_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*. \quad (75)$$

Es gilt

$$\vec{S}_{\sim} = \sum_{n_i} \vec{S}_{\sim n_i}, \quad (76)$$

$$\vec{S}_{k\sim} = \sum_{n_i} \vec{S}_{k\sim n_i}. \quad (77)$$

Zu beachten ist, daß die Fourierkoeffizienten V_{n_i} und $\vec{J}_{n_i}^*$ nach Gl. (44) und (55) selbst wieder durch das Zusammenwirken sämtlicher Kombinationsfrequenzen zustande kommen.

Damit wird aus dem Gleichungssystem (66)

$$\text{div } \sum_{n_i} \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} (\vec{S}_{\sim n_i} + \vec{S}_{k\sim n_i}) = \quad (78)$$

$$= -\frac{1}{e} \sum_{n_i} \sum_{m_i} \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} (\vec{J}_{n_i}^* [\vec{v}_{m_i} \text{ rot } \vec{p}_{m_i - n_i}^*]),$$

$$1 \leq j \leq q.$$

Auch die rechten Seiten kann man noch übersichtlicher anschreiben. Zu diesem Zwecke wird die Größe

$$M = (\vec{J} \vec{K}) = (\vec{J} [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}]), \quad (79)$$

$$M = \sum_{n_i} \sum_{m_i} \delta_{n_i} (\vec{J}_{n_i}^* [\vec{v}_{m_i} \text{ rot } \vec{p}_{m_i - n_i}^*]) \quad (80)$$

eingeführt, die wegen Gl. (2) identisch verschwindet. Durch Aufspalten in „Gleich“- und „Wechsel“-Anteil erhält man

$$M = M_{=} + M_{\sim} \equiv 0, \quad (81)$$

$$\begin{aligned} M_{=} &= -\left(\vec{J}_0 \sum_{m_i} [\vec{v}_{m_i} \text{ rot } \vec{p}_{m_i}^*]\right) = \\ &= -(\vec{J}_0 [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}]), \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} M_{\sim} &= \sum_{n_i}' \sum_{m_i} (\vec{J}_{n_i}^* [\vec{v}_{m_i} \text{ rot } \vec{p}_{m_i - n_i}^*]) = \\ &= (\vec{J} [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}])_{\sim}. \end{aligned} \quad (83)$$

M_{\sim} kann seinerseits wieder formal in die Anteile der einzelnen Kombinationsfrequenzen aufgespalten werden, wobei das weiter oben für \vec{S}_{\sim} und $\vec{S}_{k\sim}$ Gesagte gilt:

$$M_{\sim} = \sum_{n_i}' M_{\sim n_i}. \quad (84)$$

Diese Anteile sind durch

$$\begin{aligned} M_{\sim n_i} &= (\vec{J} [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}])_{\sim n_i} = \\ &= (\vec{J}_{n_i}^* \sum_{m_i} [\vec{v}_{m_i} \text{ rot } \vec{p}_{m_i - n_i}^*]) \end{aligned} \quad (85)$$

gegeben.

Das Gleichungssystem lautet somit endgültig

$$\begin{aligned} \text{div } \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} (\vec{S}_{\sim n_i} + \vec{S}_{k\sim n_i}) &= \\ &= -\frac{1}{e} \sum_{n_i}' \frac{n_j}{\sum_i n_i \omega_i} (\vec{J} [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}])_{\sim n_i}, \\ 1 \leq j \leq q. \end{aligned} \quad (86)$$

Die Gl. (39) und (40) sowie das Gleichungssystem (86) stellen die allgemeinsten Leistungsbeziehungen dieser Art dar, die sich für dreidimensionale Elektronenströmungen aufstellen lassen, sofern man von relativistischen Verhältnissen absieht. Sie gelten für Aussteuerung mit beliebig vielen Frequenzen und großen Amplituden.

Durch Spezialisierung mit

$$q = 1, \quad [\vec{J}_0 \vec{v}] = 0 \quad (87)$$

erhält man die in [8] angegebenen Beziehungen, als Sonderfall für

$$q = 2 \quad (88)$$

und rein longitudinale Verhältnisse gelangt man aus Gl. (39) zu

$$E_0 J_0 + \frac{\partial}{\partial z} J_0 V_0 = 0, \quad (89)$$

aus Gl. (40) zu

$$\sum_{n_1}' \sum_{n_2}' \left\{ E_{n_1 n_2} J_{n_1 n_2}^* - \frac{\partial}{\partial z} J_{n_1 n_2} V_{n_1 n_2}^* \right\} = 0 \quad (90)$$

und aus den Gl. (86) zu

$$\sum_{n_1}' \sum_{n_2}' \frac{n_1 \left(E_{n_1 n_2} J_{n_1 n_2}^* - \frac{\partial}{\partial z} V_{n_1 n_2} J_{n_1 n_2}^* \right)}{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2} = 0, \quad (91)$$

$$\sum_{n_1}' \sum_{n_2}' \frac{n_2 \left(E_{n_1 n_2} J_{n_1 n_2}^* - \frac{\partial}{\partial z} V_{n_1 n_2} J_{n_1 n_2}^* \right)}{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2} = 0. \quad (92)$$

Die letzten vier Leistungsbeziehungen wurden in [7] direkt abgeleitet.

5. Die Beschreibung von Vorgängen in Elektronenströmungen durch verschiedene Variablensysteme

Zur Beschreibung von Vorgängen in Elektronenströmungen kann man verschiedene Variablensysteme heranziehen, die physikalisch verschiedenen Betrachtungsweisen zugehören.

BOBROFF [1] führt vier derartige Möglichkeiten für die Wahl des Koordinatensystems an, die im folgenden kurz wiedergegeben werden sollen:

a) Lagrange-Variable. Die in Bild 1a gezeichneten Volumenelemente $d\tau$ und $d\tau_0$ beziehen sich auf *dieselben* Elektronen, zu *derselben* Zeit $t = t_1$. Beide gehen aus der Ausgangslage hervor, einmal im angesteuert ($d\tau$) und einmal im unangesteuert ($d\tau_0$)

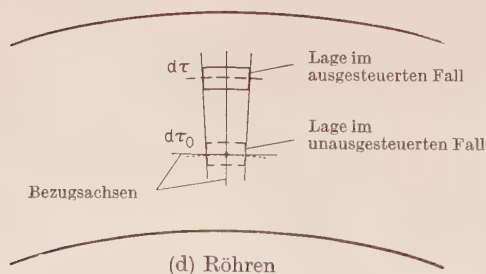
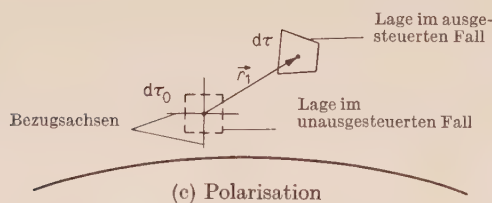
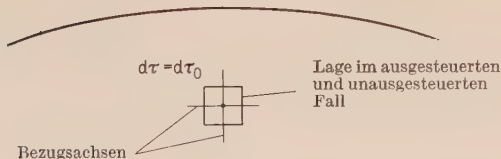
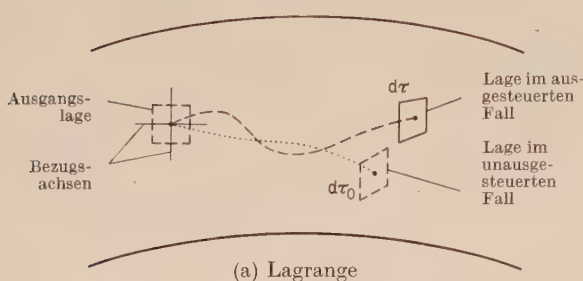


Bild 1. Vier Variablensysteme zur Beschreibung von Vorgängen in Elektronenströmungen (nach BOBROFF [1]).

steuert gedachten Fall ($d\tau_0$). Diese Volumenelemente werden im wesentlichen wie Partikel behandelt. Die Eigenschaften der darin enthaltenen Ladungen (abhängige Variable) werden mit Hilfe der Ortskoordinaten der Ausgangslage (unabhängige Variable) ausgedrückt.

b) Euler-Variable. Es wird ein ortsfestes Volumenelement $d\tau = d\tau_0$ betrachtet, in dem sich sowohl zu verschiedenen Zeiten als auch zu einer bestimmten Zeit $t = t_1$ im angesteuerten und im unangesteuerten Fall *verschiedene* Ladungen befinden (Bild 1b). Die Koordinaten dieses Volumenelements stellen die unabhängigen Variablen dar. Die Verwendung von Euler-Variablen entspricht einer Feldbeschreibung der Vorgänge in der Elektronenströmung. Es sei daran erinnert, daß in der vorliegenden Arbeit bis jetzt ausschließlich von der Eulerschen Beschreibung Gebrauch gemacht wurde.

c) Polarisations-Variable. Als unabhängige Variable werden die Ortskoordinaten des Volumenelements $d\tau_0$ (unangesteuerten Fall) herangezogen (Bild 1c), welches, wie auch in der Eulerschen Betrachtungsweise, zu *verschiedenen* Zeiten *verschiedene* Ladungen enthält. Das Volumenelement $d\tau$ (angesteuerten Fall) ist dadurch definiert, daß es zu einer bestimmten Zeit $t = t_1$ *dieselben* Ladungen enthält wie $d\tau_0$. Das Volumenelement $d\tau_0$ wird also bei Aussteuerung verschoben und verzerrt. Die Verschiebung \vec{r}_1 spielt im folgenden noch eine gewisse Rolle.

d) Röhren-Variable. Betrachtet wird im unangesteuerten Fall ein zylindrisches Volumenelement $d\tau_0$, dessen Achse mit einer bestimmten Elektronenbahn zusammenfällt und dessen Endflächen normal dazu sind. Seine Koordinaten stellen die unabhängigen Variablen dar. Die Ladungen fließen also innerhalb einer „Röhre“, d.h. die Beschreibung mittels Röhren-Variablen läuft im wesentlichen auf eine Unterteilung der Elektronenströmung in einzelne Stromfäden hinaus. Bei Aussteuerung wird ein bestimmter Stromfaden seine Lage im Raum verändern. Das Volumenelement $d\tau$ (angesteuerten Fall) ist so definiert, daß es sich auf ein und denselben Stromfaden bezieht. Seine Endflächen sollen sich jedoch in *denselben* Ebenen befinden wie die Endflächen von $d\tau_0$ (Bild 1d). Diese Betrachtungsweise ist also ein Mittelding zwischen der Euler- (longitudinal) und der Polarisationsbeschreibung (transversal).

BOBROFF diskutiert die Vor- und Nachteile der einzelnen Beschreibungsarten, insbesondere die Tatsache, daß sich sinnvoll nur b), c) und d) für eine Kleinsignal-Rechnung verwenden lassen. Nicht in allen Fällen findet man mit diesen vier Variablensystemen das Auslangen. So zeigt BUTCHER [4], daß es zur Formulierung eines Variationsprinzips für dreidimensionale Elektronenströmungen von Vorteil ist, Größen einzuführen, die ebenso wie die Lagrange- und die Euler-Variablen aus der Hydro-

dynamik stammen. Ihre Bedeutung wird hier, teilweise einer Darstellung von BUNEMAN [3] folgend, kurz erläutert.

Für ein allgemeines Vektorfeld \vec{A} lassen sich Wirbellinien angeben, die durch die Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{(\text{rot } \vec{A})_x} = \frac{dy}{(\text{rot } \vec{A})_y} = \frac{dz}{(\text{rot } \vec{A})_z} \quad (93)$$

definiert sind. Im hydrodynamischen Fall tritt das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} an Stelle von \vec{A} , im rein magnetischen Fall hat \vec{A} die Bedeutung des Vektorpotentials; die Wirbellinien von \vec{A} entsprechen also wegen Gl. (21) den Feldlinien von \vec{B} . Für die Anwendung auf Elektronenströmungen ist es nahelegend, Wirbellinien für den Vektor des verallgemeinerten Impulses

$$\vec{p} = m\vec{v} - e\vec{A} \quad (94)$$

anzugeben. Für diese gilt

$$\frac{dx}{(\text{rot } \vec{p})_x} = \frac{dy}{(\text{rot } \vec{p})_y} = \frac{dz}{(\text{rot } \vec{p})_z} \quad (95)$$

Pro Flußeinheit wird eine Linie angenommen.

Man denkt sich nun eine Fläche F , die alle diese Linien einmal und nur einmal schneidet. Auf dieser Fläche wird ein Koordinatennetz angenommen (siehe Bild 2). Durch einen Grenzübergang gelangt man daraus zu einem Koordinatensystem ξ, η . Wirbellinien sind dann durch $\xi = \text{const}, \eta = \text{const}$ gegeben.

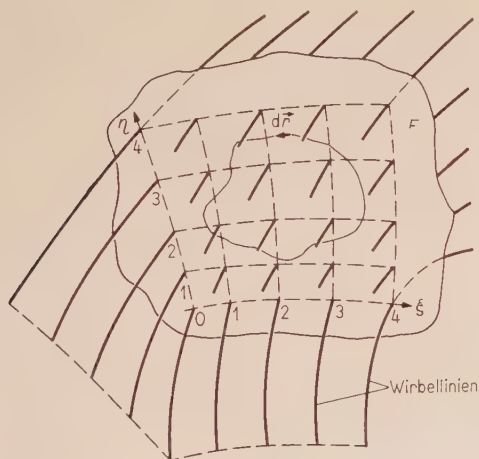


Bild 2. Wirbellinien $\frac{dx}{(\text{rot } \vec{p})_x} = \frac{dy}{(\text{rot } \vec{p})_y} = \frac{dz}{(\text{rot } \vec{p})_z}$ und Koordinatensystem ξ, η (nach BUNEMAN [3]).

Wegen des Stokesschen Satzes gilt

$$\oint (\text{rot } \vec{p} d\vec{r}) = \oint (\vec{p} d\vec{r}) = \oint \xi d\eta, \quad (96)$$

wobei sich die Integration über ein beliebiges Teilstück der Fläche F bzw. dessen Berandung erstreckt.

Aus Gl. (96) folgt

$$\oint (\vec{p} - \xi \text{ grad } \eta, d\vec{r}) = 0 \quad (97)$$

für jeden beliebigen Integrationsweg. Somit erhält man für \vec{p} die Darstellung

$$\vec{p} = \xi \text{ grad } \eta + \text{grad } \psi, \quad (98)$$

wobei sich ψ als Wirkungsfunktion deuten läßt [4].

Als erster stellte CLEBSCH [5] den Vektor \vec{v} der Hydrodynamik in der Form $\xi \text{ grad } \eta + \text{grad } \psi$ dar. Es hat sich daher für die oben definierten Größen die Bezeichnung Clebsch-Variable eingebürgert.

LAMB [10] zeigt, daß man die Koordinaten $\xi = \text{const}, \eta = \text{const}$ immer auf dieselben Partikel beziehen kann. Es gilt dann

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0. \quad (99)$$

Die Gleichungen für die wirbelfreie Elektronenströmung mit $\text{rot } \vec{p} = 0$ ergeben sich als Spezialfall für $\xi = \eta = 0$. Die Eigenschaft $\text{rot } \vec{p} = 0$ bleibt in der Elektronenströmung erhalten, d. h. ein Elektronenstrahl, der z. B. an der Kathode wirbelfrei ist, ist auch im weiteren Verlauf wirbelfrei. Wirbelfreiheit des verallgemeinerten Impulses an der Kathode ist dann gegeben, wenn an der Kathodenoberfläche keine Normalkomponenten der magnetischen Feldstärken auftreten (siehe z. B. GABOR [6]).

Jedes der besprochenen Variablensysteme hat in gewissen Anwendungsfällen Vorteile, in anderen wieder Nachteile. Man kann nicht sagen, daß eines dem anderen absolut überlegen sei. Im nächsten Abschnitt wird jedoch gezeigt, daß es unter Umständen unmöglich ist, mit einem bestimmten Beschreibungssystem allein das Auslangen zu finden. Es ist dann nötig, Variable aus einer anderen Betrachtungsweise heranzuziehen, die in der ursprünglichen nicht enthalten sind und die wir deshalb im folgenden als „fremde“ Variable bezeichnen wollen.

Als typisches Beispiel für eine derartige „fremde“ Variable kann die Polarisationsverschiebung \vec{r}_1 gelten, die in einer bestimmten Leistungsbeziehung auftritt, in der ansonsten nur Euler-Variable vorkommen. Dieser Fall wird weiter unten noch näher besprochen.

6. Leistungs-Erhaltungssätze

Es tritt die Frage auf, ob es möglich ist, Gl. (40) und die q Gleichungen (86) in die Form von Leistungs-Erhaltungssätzen zu bringen.

Unter einem Leistungs-Erhaltungssatz soll hier eine Gleichung (in differentieller Form) verstanden werden, die es nach Integration über einen Volumenbereich mit zeitlich konstanter Hüllfläche gestattet, allein aus der Kenntnis der physikalischen Größen auf dieser Fläche Aussagen über die gegenseitige Verknüpfung der verschiedenen Leistungsanteile zu treffen.

Es scheint nicht zu gelingen, das Gleichungssystem (86) in Form von Leistungs-Erhaltungssätzen anzuschreiben, ohne daß dabei „fremde“ Variable herangezogen werden.

Dies steht in Übereinstimmung mit einer Arbeit von STURROCK [11], der im Rahmen von Unter-

suchungen über allgemeine Beziehungen bei nicht-linearen dynamischen Systemen für dreidimensionale Elektronenströmungen und Erregung mit zwei Frequenzen Ausdrücke erhält, die in der hier verwendeten Schreibweise folgendermaßen lauten:

$$\vec{P}_1 = \sum'_{n_1} \sum'_{n_2} \frac{n_1 \{ [\vec{E}_{n_1 n_2}^* \vec{H}_{n_1 n_2}] + \vec{J}_{n_1 n_2} V_{n_1 n_2}^* \}}{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2} - \frac{1}{e} \sum'_{n_1} \sum'_{n_2} \frac{n_1 \left\{ \vec{J}_{n_1 n_2} \left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{n_1 n_2}^* - (\vec{J} \xi)_{n_1 n_2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)_{n_1 n_2}^* \right\}}{n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2} \quad (100)$$

Ein analoger Ausdruck gilt für \vec{P}_2 .

\vec{P}_1 und \vec{P}_2 sind divergenzfreie Vektoren mit der formalen Bedeutung gemittelter Energieflußdichten. ξ und η sind die weiter oben definierten Clebsch-Variablen, von denen STURROCK Gebrauch machen muß, um aus dem von ihm verwendeten Lagrange-Hamiltonschen Formalismus für den betreffenden Fall Aussagen machen zu können.

Durch Anwendung des Operators div auf Gl. (100) erhält man also einen Leistungs-Erhaltungssatz, welcher der früher abgeleiteten Gl. (66) entspricht. In diesem kommen die Clebsch-Variablen jedoch explizit vor und es scheint nicht möglich zu sein, die entsprechenden Terme so zu transformieren, daß in der Gleichung nur mehr Größen mit unmittelbar anschaulicher physikalischer Bedeutung enthalten sind.

Der Begriff der „fremden“ Variablen tritt wieder augenfällig in Erscheinung, wenn man das Leistungstheorem (40) für eine Frequenz und Kleinsignal-Annahme (Störungsrechnung) spezialisiert und mit einem Kleinsignal-Erhaltungssatz, den BOBROFF und HAUS [2] für Elektronenströmungen mit nichtverschwindendem Wirbel des verallgemeinerten Impulses abgeleitet haben, vergleicht.

Dazu ist es von Vorteil, von Gl. (40) in einer anderen Schreibweise auszugehen. Durch Multiplikation von Gl. (86) mit ω_j und nachfolgende Summation über alle Indizes j ergibt sich

$$\text{div}(\vec{S} \sim + \vec{S}_k \sim) = - \frac{1}{e} (\vec{J} [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}]) \sim, \quad (101)$$

oder analog zu Gl. (46)

$$\sum'_{n_i} \{ (\vec{E}_{n_i} \vec{J}_{n_i}^*) - \text{div} (V_{n_i}^* \vec{J}_{n_i}) \} = \frac{1}{e} \sum'_{n_i} \sum'_{m_i} (\vec{J}_{n_i}^* [\vec{v}_{m_i} \text{ rot } \vec{p}_{m_i-n_i}^*]). \quad (102)$$

Für Aussteuerung mit nur einer Frequenz ($q=1$) fällt einfach der Index i überall fort, Gl. (102) selbst bleibt formal unverändert.

Zur Durchführung einer Störungsrechnung wird der Momentanwert einer Vektorgröße $\vec{A}(\vec{r}, t)$ durch die Störgrößen $\vec{A}_0(\vec{r})$, $\vec{A}_1(\vec{r}, t)$, $\vec{A}_2(\vec{r}, t)$ ausgedrückt:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}) + \vec{A}_1(\vec{r}, t) + \vec{A}_2(\vec{r}, t) + \dots \quad (103)$$

Der Index n gibt dabei die Kleinheitsordnung der betreffenden Störgröße an. Es bestehen folgende Beziehungen zwischen den Fourierkomponenten und

den Störgrößen [8]:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r}) + \vec{A}_2(\vec{r}, t) + \dots, \quad (104)$$

$$2 \text{Re} \{ \vec{A}_1(\vec{r}) \exp j \omega t \} = \vec{A}_1(\vec{r}, t) + \dots, \quad (105)$$

$$2 (\vec{A}_1 \vec{A}_1^*) = 2 (\vec{A}_1^2) = (\vec{A}_1^2) + \dots, \quad (106)$$

$$(\vec{A}_1 \vec{B}_1^*) + (\vec{A}_1^* \vec{B}_1) = 2 \text{Re} (\vec{A}_1 \vec{B}_1^*) = (\vec{A}_1 \vec{B}_1) + \dots \quad (107)$$

Entwickelt man Gl. (102) bis zu Gliedern 1. Ordnung, so erhält man

$$2 \text{Re} \{ (\vec{E}_1 \vec{J}_1^*) - \text{div} (V_1 \vec{J}_1^*) \} = \frac{2}{e} \text{Re} \{ \vec{J}_1^* [\vec{v}_0 \text{ rot } \vec{p}_1] + \vec{J}_1^* [\vec{v}_1 \text{ rot } \vec{p}_0] \}. \quad (108)$$

V_1 , das CHUSCHE Potential, kann man ausdrücken als

$$V_1 = - \frac{1}{\eta} (\vec{v}_0 \vec{v}_1). \quad (109)$$

Unter Beachtung von

$$\text{div} [\vec{E}_n \vec{H}_n^*] = - (\vec{E}_n \vec{J}_n^*) - j \omega n \{ \mu_0 (\vec{H}_n \vec{H}_n^*) - \epsilon_0 (\vec{E}_n \vec{E}_n^*) \} \quad (110)$$

ergibt sich nach Einführen der zu den Störgrößen (Gl. (104) bis (107)) gehörenden Amplituden:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \text{div} \left\{ [\vec{E}_1 \vec{H}_1^*] - \frac{1}{\eta} (\vec{v}_0 \vec{v}_1) \vec{J}_1^* \right\} = - \frac{1}{2e} \text{Re} \{ \vec{J}_1^* [\vec{v}_0 \text{ rot } \vec{p}_1] + \vec{J}_1^* [\vec{v}_1 \text{ rot } \vec{p}_0] \}. \quad (111)$$

Glieder 2. und höherer Kleinheitsordnung wurden fortgelassen.

BOBROFF und HAUS [2] leiten einen Kleinsignal-Leistungserhaltungssatz ab, der in unserer Schreibweise die Gestalt

$$\text{Re} \text{div} \left\{ [\vec{E}_1 \vec{H}_1^*] - \frac{1}{\eta} (\vec{v}_0 \vec{v}_1) \vec{J}_1^* - \frac{j \omega}{2e} \varrho_0 (\vec{r}_1^* [\vec{r}_1 \text{ rot } \vec{p}_0]) \vec{v}_0 + \frac{1}{e} [(\vec{v}_0 \text{ rot } \vec{p}_1) + (\vec{v}_1 \text{ rot } \vec{p}_0)] [\varrho_0 \vec{v}_0 \vec{r}_1^*] \right\} = 0 \quad (112)$$

annimmt.

Die Polarisationsstromdichte \vec{J}_1 geht am Strahlrand in die Oberflächenstromdichte, im Inneren des Strahles in die Eulersche Stromdichte über, so daß die Übereinstimmung mit der bisher verwendeten Variablen \vec{J}_1 gegeben ist. Die übrigen Größen in Gl. (112) sind Euler-Variablen, mit einer Ausnahme: Die Auslenkung \vec{r}_1 stammt aus der Polarisations-Betrachtungsweise.

In Gl. (111) hat man es mit einem Kleinsignal-Leistungstheorem in Euler-Variablen zu tun, das, wie GRAU (persönliche Mitteilung) zeigen konnte, durch geeignete Umformungen in den Kleinsignal-Erhaltungssatz (112) übergeführt werden kann. Es ist hierzu jedoch unbedingt nötig, eine der Euler-

schen Betrachtungsweise „fremde“ Variable (\vec{r}_1) heranzuziehen.

Die Umformung der in den Abschnitten 3 und 4 abgeleiteten Leistungsbeziehungen in Leistungserhaltungssätze ist also möglich, wenn man die Heranziehung „fremder“ Variabler zuläßt, wie sie in Abschnitt 5 definiert wurden.

Herrn Prof. Dr. H. W. KÖNIG danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, Herrn Dr. H. PÖTZL und Herrn Dr. G. GRAU für kritische Hinweise anlässlich zahlreicher Diskussionen.

Verzeichnis der verwendeten Symbole

$\vec{A}_{n_i} = \vec{A}_{n_1 n_2 \dots n_q}$	komplexe Fourieramplitude des Vektors \vec{A} ,
$\vec{A}_0 = \vec{A}_{00} \dots 0$,	
\vec{A}_n	komplexe Amplitude der Störgröße n -ter Kleinheitsordnung,
$\bar{\vec{A}}$	zeitlicher Mittelwert von \vec{A} ,
\vec{A}^*	konjugiert komplexer Wert von \vec{A} ,
\vec{A}	Vektorpotential,
$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$	Vektor der magnetischen Induktion,
$e > 0$	Elementarladung,
\vec{E}	Vektor der elektrischen Feldstärke,
\vec{H}	Vektor der magnetischen Feldstärke,
j	imaginäre Einheit,
\vec{J}	Dichte des Konvektionsstromes,
$\vec{K} = [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}]$	
m	Ruhemasse des Elektrons,
$\vec{M} = (\vec{J} [\vec{v} \text{ rot } \vec{p}])$	
\vec{p}	verallgemeinerter Impuls,
q	Anzahl der aussteuernden Frequenzen,
\vec{r}	Ortsvektor,
\vec{r}_1	Auslenkung,
\vec{S}	Poyntingscher Vektor, elektromagnetische Leistungsdichte,
\vec{S}_k	kinetische Leistungsdichte,
t	Zeit.

\vec{v}	Geschwindigkeitsvektor,
V	verallgemeinertes kinetisches Potential,
w	elektromagnetische Energiedichte,
w_k	kinetische Energiedichte,
x, y, z	Kartesische Koordinaten,
$\delta_{n_i} = \begin{cases} -1 & \text{für } n_i = 0 \\ +1 & \text{für } n_i \neq 0, \end{cases}$	
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes,
$\eta = e/m$	spezifische Ladung des Elektrons,
μ_0	Permeabilität des leeren Raumes,
ξ, η	Clebsch-Variable,
ϱ	Raumladungsdichte,
$\sum_i n_i \omega_i = \sum_{i=1}^q n_i \omega_i$,	
$\sum_{n_i} \vec{A}_{n_i} = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_q=-\infty}^{\infty} \vec{A}_{n_i}$,	
$\sum_{n_i}' \vec{A}_{n_i} = \sum_{n_i} \vec{A}_{n_i} - \vec{A}_0$,	
τ	Volumen,
ψ	Wirkungsfunktion,
ω	Kreisfrequenz.

Schrifttum

- [1] BOBROFF, D. L., Independent space variables for small-signal electron beam analyses. Transact. Inst. Radio Engrs. ED-6 [1959], 68–78.
- [2] BOBROFF, D. L. und HAUS, H. A., Uniqueness and orthogonality of small-signal solutions in electron beams, Raytheon Tech. Rep., Nr. 31, Juni 1958, Waltham, Mass.
- [3] BUNEMAN, O., Circulation in the flow of electricity: Dirac's new variables. Proc. Roy. Soc. London A 215 [1952], 346–352.
- [4] BUTCHER, P. N., A variational formulation of the multistream electrodynamic field equations. Phil. Mag. (7) 44 [1953], 971–979.
- [5] CLEBSCH, A., Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. Crelle J. Math. 56 [1859], 1–10.
- [6] GABOR, D., Dynamics of electron beams. Proc. Inst. Radio Engrs. 33 [1945], 792–805.
- [7] GRAU, G. K., Die Energiebilanz im parametrischen Elektronenstrahlverstärker. A. E. Ü. 14 [1960], 247–255.
- [8] KOGELNIK, H., Über die Energieverhältnisse in Elektronenströmungen. A. E. Ü. 12 [1958], 419–427.
- [9] KÖNIG, H. W., Das elektrokinetische Leistungstheorem. Vortrag auf der Internationalen Konferenz für Mikrowellenröhren. München, 7.–11. Juni 1960.
- [10] LAMB, H., Lehrbuch der Hydrodynamik. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1931.
- [11] STURROCK, P. A., General relations concerning multiply-periodic excitation of nonlinear dynamical systems. M. L. Report No. 760, Stanford, Cal., Okt. 1960.

Fachtagungen

4. bis 6. Oktober: „Fernwirktechnik“
Stuttgart
Veranstaltet vom NTG-Fachausschuß „Fernwirktechnik“ in Zusammenarbeit mit dem Elektrotechnischen Verein Württemberg im VDE.
Tagungsort: Hörsaal 60 der Technischen Hochschule, Stuttgart, Keplerstraße 10.
Anmeldung bis 5. September 1961 bei der Tagungsgeschäftsstelle im Hause der Technischen Werke der Stadt Stuttgart (Geschäftsstelle des Elektrotechnischen Vereins Württemberg im VDE), Stuttgart 1, Lautenschlagerstraße 21, Zimmer 403, Ruf 24 91 34 77.
26. bis 28. Oktober: „100 Jahre Elektroakustik“
Frankfurt am Main
Veranstaltet vom NTG-Fachausschuß „Elektroakustik“ gemeinsam mit dem Physikalischen Verein Frankfurt und dem VDE-Bezirksverein Frankfurt.
Tagungsort: Großer Physikalischer Hörsaal der Universität, Frankfurt am Main, Robert-Mayer-Straße 2–4.
Anmeldung bis 25. September 1961 bei der Tagungsgeschäftsstelle, VDE-Bezirksverein, Frankfurt am Main, Rothschildallee 33, Ruf 4 57 80.

Die H_{01} -Welle im runden Hohlleiter mit ideal leitender, rauher Wand

von ROBERT WILLETT

Mitteilung aus dem Institut für theoretische Elektrotechnik
der Technischen Hochschule Darmstadt

(A.E.Ü. 15 [1961], 386—390; eingegangen am 15. April 1961)

DK 621.372.823

Man läßt eine ebene Welle auf eine ideal leitende, ebene Oberfläche auftreffen. Diese ist mit unregelmäßig, aber gleichmäßig dicht verteilten, ideal leitenden Halbkugeln aufgerauht. Das Ergebnis wird auf die H_{01} -Welle im runden Hohlleiter übertragen. Es zeigt sich, daß die Auswirkung der Wandrauhigkeit auf die H_{01} -Welle technisch ohne Bedeutung ist. Krümmungen und Querschnittänderungen innerhalb der bis heute üblichen Toleranzen bleiben also das Hauptproblem für den Betrieb mit der H_{01} -Welle.

A planar wave is allowed to strike an ideally conducting plane surface. This surface is made irregular by the application of a random distribution, with uniform density, of ideally conducting hemispheres. The result is transferred to the H_{01} -mode in the circular waveguide. It turns out that the effect of wall surface irregularity on the H_{01} -mode is without technical importance. Curvatures and cross-sectional variations within the today customary tolerances remain thus the principal problem for operation with the H_{01} -mode.

1. Einleitung

Seit einiger Zeit schon wird untersucht, unter welchen Umständen im runden Hohlleiter die H_{01} -Welle in andere Wellentypen umschlägt. Als Ursache für die unerwünschte Umwandlung interessieren vor allem

- a) die Abweichung der Hohlleiterachse von der Geraden,
- b) die Abweichung des Hohlleiterquerschnitts von der Kreisform,
- c) Stufen, Schlitze usw., die an Einkopplungs- und Übergangsstellen liegen, und deren Abmessungen mit der Wellenlänge vergleichbar sind.

In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, ob und wie sich die Oberflächenrauhigkeit eines runden Hohlleiters auf die Fortpflanzung der H_{01} -Welle auswirkt. Von der Rauigkeit abgesehen sei der Hohlleiter geometrisch ideal und bestehe aus Material von unendlich guter Leitfähigkeit. Die Abschnitte 2 und 3 decken sich teilweise mit einer entsprechenden Arbeit von BIOT [1]. Eine ebene, horizontal polarisierte Welle trifft auf eine ideal leitende, ebene Wand, die durch ideal leitende Halbkugeln aufgerauht wurde. Besondere Aufmerksamkeit wird auf die Tatsache gelenkt, daß die Methode von BIOT auch anwendbar ist, wenn die Halbkugeln zwar gleichmäßig dicht, jedoch unregelmäßig verteilt sind. Ferner wird die Phasenlage der reflektierten Welle dem Vorzeichen nach richtig angegeben. Erst nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit wurde der Verfasser darauf aufmerksam, daß BIOT selbst einen entsprechenden Vorzeichenfehler berichtigt hat [2], wodurch seine Ergebnisse noch plausibler wurden. Im Abschnitt 4 wird das Ergebnis auf den runden Hohlleiter übertragen. Dank der Tatsache, daß sich die H_{01} -Welle an der Wandung wie eine einfallende und reflektierte, horizontal polarisierte, ebene Welle verhält, bleibt die Auswirkung der Rauigkeit technisch ohne Bedeutung.

2. Reflexion an einer Wand, auf der eine kleine Halbkugel sitzt

Wir nähern uns dem gegebenen Problem schrittweise und geben zunächst das Feld an, welches entsteht, wenn man eine horizontal polarisierte, ebene Welle, die aus dem leeren Halbraum $0 < z$ kommt, auf die unendlich gut leitende xy -Ebene auftreffen läßt:

$$E_y^{(p)}(x, z) = E_y^{(\text{einf})} e^{-jk_0 x \sin \alpha} (e^{jk_0 z \cos \alpha} - e^{-jk_0 z \cos \alpha}), \quad (1a)$$

$$H_x^{(p)}(x, z) = \cos \alpha \frac{E^{(\text{einf})}}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} e^{-jk_0 x \sin \alpha} (e^{jk_0 z \cos \alpha} + e^{-jk_0 z \cos \alpha}), \quad (1b)$$

$$H_z^{(p)}(x, z) = \sin \alpha \frac{E^{(\text{einf})}}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} e^{-jk_0 x \sin \alpha} (e^{jk_0 z \cos \alpha} - e^{-jk_0 z \cos \alpha}). \quad (1c)$$

Darin sind

- | | |
|--|--|
| $E_y^{(\text{einf})}$ | die Amplitude des elektrischen Vektors der einfallenden Welle, |
| $E_y^{(p)}, H_x^{(p)}, H_z^{(p)}$ | die Amplituden von einfallender plus reflektierter Welle. Der Index p weist darauf hin, daß dieses Gesamtfeld im weiteren Verlauf die Rolle eines primären, anregenden Feldes übernimmt. |
| $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ | die Wellenzahl, |
| α | der Einfallswinkel gemäß Bild 1. |

Als Zeitgesetz dient $e^{j\omega t}$. Die Gl. (1a) bis (1c) sind eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen, die im leeren Halbraum $0 < z$ die Form

$$\text{rot } \mathbf{E} + j\omega \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} - j\omega \mathbf{D} = 0, \quad (2a, b)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2c, d)$$

haben. Wenn das Medium von Material erfüllt wäre,

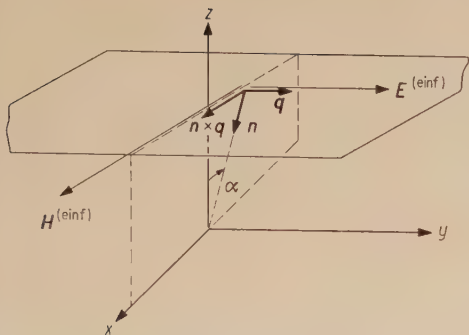


Bild 1. Eine ebene Welle trifft auf die unendlich gut leitende xy -Ebene.

so müßten dessen Materialkonstanten μ, ϵ an die Stelle von μ_0, ϵ_0 treten. Die Eigenschaften des Materials kann man jedoch auch mit den elektrischen und magnetischen Polarisationen \mathbf{P}, \mathbf{M} berücksichtigen, die man durch die Beziehungen

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} \quad (3a, b)$$

definiert. Die Maxwell'schen Gleichungen schreiben sich dann

$$\text{rot } \mathbf{E} + j\omega\mu_0 \mathbf{H} = -j\omega\mu_0 \mathbf{M}, \quad (4a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} = j\omega \mathbf{P}, \quad (4b)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (4c, d)$$

Wie Gl. (2a) bis (2d) sind das vier unabhängige Gleichungen für $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{M}$ werden mit dem Material vorgegeben. Gl. (4a) und (4b) sind bereits zwei unabhängige Gleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{H} und werden allein weiter betrachtet.

$j\omega\mu_0 \mathbf{M}, j\omega \mathbf{P}$ haben die Dimensionen $\frac{Vs}{s} \frac{1}{m^2}$ und $\frac{\text{Coulomb}}{s} \frac{1}{m^2}$. Man kann sie also als räumliche

Strömungen magnetischer und elektrischer Ladungen auffassen. Im folgenden sollen denn auch \mathbf{P}, \mathbf{M} nicht mehr Materialeigenschaften kennzeichnen. Vielmehr bedeuten nun $j\omega\mu_0 \mathbf{M}, j\omega \mathbf{P}$ dem Vakuum eingeprägte Strömungen magnetischer und elektrischer Ladungen. Man könnte auch wieder zu Medien aus beliebigem Material übergehen, indem man μ, ϵ statt μ_0, ϵ_0 verwendet. Das wird aber in der vorliegenden Arbeit nicht nötig.

Der Lösungsapparat für Gl. (4) heißt

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi + k_0^2 \Pi - jk_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{rot } \Pi^*, \quad (5a)$$

$$\mathbf{H} = \text{grad div } \Pi^* + k_0^2 \Pi^* + j \frac{k_0}{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}} \text{rot } \Pi; \quad (5b)$$

$$\Delta \Pi + k_0^2 \Pi = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad (6a)$$

$$\Delta \Pi^* + k_0^2 \Pi^* = -\mathbf{M}; \quad (6b)$$

$$\Pi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{-jk_0 r}}{r} dV, \quad (7a)$$

$$\Pi^*(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\xi, \eta, \zeta) \frac{e^{-jk_0 r}}{r} dV. \quad (7b)$$

Wir nähern uns der gestellten Aufgabe einen weiteren Schritt, indem wir an der Stelle $x = \xi, y = \eta =$ beliebig eine unendlich gut leitende Halbkugel aus der xy -Ebene herausragen lassen. Ihr Radius a sei klein gegen die Freie-Raum-Wellenlänge λ des Gesamtfeldes Gl. (1a), $a/\lambda \ll 1$. Dieses

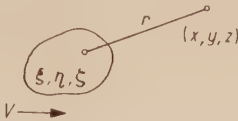


Bild 2. Koordinatensystem; ξ, η, ζ sind die Koordinaten der anregenden Strömungen, x, y, z die des Aufpunktes.

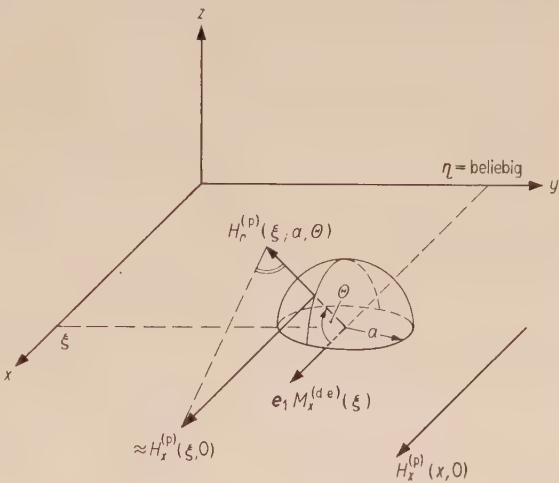


Bild 3. Eine unendlich gut leitende Halbkugel mit dem kleinen Radius a auf der unendlich gut leitenden xy -Ebene.

Gesamtfeld erscheint der Halbkugel daher als ein angenähert homogenes magnetisches Wechselfeld mit der Amplitude $H_x^{(p)}(\xi, 0)$. An ihrer Oberfläche entsteht zunächst die normal gerichtete magnetische Feldstärke

$$H_x^{(p)}(\xi; a, \Theta) = H_x^{(p)}(\xi, 0) \cos \Theta, \quad (8)$$

die von einer sekundären magnetischen Normalkomponente aufgehoben werden muß. Eine entsprechende Schwingung wird von einem Hertz'schen Dipolelement erregt, dessen Hertz'schen Vektor aus Gl. (7b) hervorgeht, wenn man das Volumen V , in welchem $\mathbf{M} \neq 0$ ist, auf den Halbkugelmittelpunkt zusammenschrumpfen läßt und der Polarisation \mathbf{M} die Richtung zunehmender x zuweist. Man erhält als Hertz'schen Vektor des Dipolelementes

$$\Pi^*(x, z) = \mathbf{e}_1 \Pi_x^*(x, y, z) = \frac{\mathbf{M}(\xi)}{4\pi} dV \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \quad (9)$$

$$\text{oder auch} \quad \Pi_x^*(x, y, z) = M_x^{(de)}(\xi) \frac{e^{-jk_0 r}}{r}, \quad (10)$$

wobei man unter dem Dipolmoment $\mathbf{e}_1 M_x^{(de)}(\xi)$ den Grenzwert

$$\mathbf{e}_1 M_x^{(de)}(\xi) = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\mathbf{M}(\xi) dV}{4\pi} \quad (11)$$

versteht. Wegen $a/\lambda \ll 1$ brauchen wir bei der Erfüllung der Randbedingung $H_{\text{normal}} = 0$ auf der Halbkugeloberfläche nur das (statische) Nahfeld des Dipolelementes zu berücksichtigen. Nach Gl. (5b) wird

$$H_x^{(\text{de})}(\xi; a, \Theta) = 2 M_x^{(\text{de})}(\xi) \frac{\cos \Theta}{a^3}.$$

Damit nun

$$H_x^{(\text{p})}(\xi; a, \Theta) + H_x^{(\text{de})}(\xi; a, \Theta) = 0$$

wird, muß man

$$M_x^{(\text{de})}(\xi) = -\frac{1}{2} H_x^{(\text{p})}(\xi, 0) a^3 \quad (12)$$

wählen.

3. Reflexion an einer Wand, die gleichmäßig dicht mit kleinen Halbkugeln belegt ist

Man belegt nun die ganze xy -Ebene regelmäßig mit ideal leitenden, gleich kleinen Halbkugeln (Bild 6). Eine beliebige Halbkugel etwa mit der Nummer 1 wird dann nicht nur vom erregenden Primärfeld, sondern auch von den Feldkomponenten $H_r^{(\text{s})}$, $H_\theta^{(\text{s})}$, $E_\varphi^{(\text{s})}$ getroffen, die von den Halbkugeln 2, 3, 4, ... herrühren. Nur solche Halbkugeln werden in diesem Zusammenhang berücksichtigt, deren Abstand von der Halbkugel 1 klein ist im Vergleich zu λ . Die Sekundärkomponenten sind dann in Phase mit $H_x^{(\text{p})}$. An Hand des Schemas für die Sekundärkomponenten (Bild 4, nur die von der Halbkugel

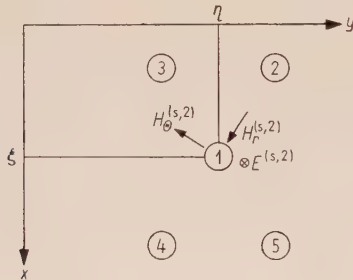


Bild 4. Überlagerung der Sekundärkomponenten.

Nummer 2 herrührenden wurden eingetragen) erkennt man, daß sich die $H_r^{(\text{s})}$ und $E_\varphi^{(\text{s})}$ aufheben, die $H_\theta^{(\text{s})}$ dagegen eine Resultierende in x -Richtung bilden. Das Gleiche gilt, wenn auch nur angenähert im Mittel, wenn die Halbkugeln unregelmäßig, aber gleichmäßig dicht, etwa wie die ersten Regentropfen auf einem trockenen Blechdach, verteilt sind. Die Halbkugel 1 wird also von einem Gesamtfeld erregt, für das man

$$H_x^{(\text{p})}(\xi, 0) + H_x^{(\text{dw})}(\xi, 0)$$

ansetzen kann. $H_x^{(\text{dw})}(\xi, 0)$ (dw für Dipolwand) ist die Resultierende aller Dipolfeldkomponenten der Halbkugeln 2, 3, 4, ... am Ort der Halbkugel 1. Das Dipolelement, das für die Erfüllung der Randbedingung auf der Halbkugel sorgt, bekommt statt Gl. (12) das Moment

$$M_x^{(\text{de})}(\xi) = -\frac{1}{2} (H_x^{(\text{p})}(\xi, 0) + H_x^{(\text{dw})}(\xi, 0)) a^3. \quad (13)$$

$H_x^{(\text{dw})}$ ist über Gl. (5b) mit dem Hertzischen Vektor $\Pi_x^{*(\text{dw})}$ der Dipolwand verknüpft, der nun ermittelt werden soll.

Es gebe N die Anzahl der Dipolelemente pro Fläche an. $N M_x^{(\text{de})}(\xi)$ ist dann, wenn die Dipolelemente dicht genug liegen, ein Dipolbelag oder eine Dipolwand. An Stelle von Gl. (10) tritt

$$\mathbf{e}_1 \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) = \int \int_{xy\text{-Ebene}} \mathbf{e}_1 N M_x^{(\text{de})}(\xi) \frac{e^{-jk_0 r}}{r} d\xi d\eta. \quad (14)$$

Statt des Dipolbelages $N M_x^{(\text{de})}(\xi)$, der die xy -Ebene ausfüllt, möge nunmehr die Dipoldichte $N M_x^{(\text{de})}(\xi)/d$ den Raum erfüllen, der von einer Platte der geringen Stärke d eingenommen wird. Die Platte sei

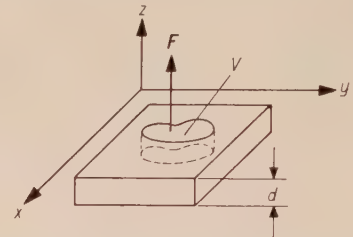


Bild 5. An die Stelle der Dipolwand tritt eine unendlich ausgedehnte Platte mit der Dipoldichte $N M_x^{(\text{de})}(\xi)/d$.

unendlich ausgedehnt und habe die Ebene $z = 0$ zur Mittelebene. Gl. (14) geht dann vorübergehend in

$$\Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) = \int \frac{N M_x^{(\text{de})}(\xi)}{d} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} dV, \quad (15)$$

$$dV = d \cdot d\xi d\eta$$

über. Der Vergleich mit Gl. (6b) und (7b) zeigt, daß $\Pi_x^{*(\text{dw})}$ die Differentialgleichung

$$\Delta \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) + k_0^2 \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) = -\frac{4\pi N M_x^{(\text{de})}(x)}{d}$$

erfüllen muß. Außerhalb der Platte — also im Raumteil $0 < z$, sofern $d \rightarrow 0$ geht — geht Gl. (16) in

$$\Delta \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) + k_0^2 \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) = 0, \quad 0 < z \quad (17)$$

über. Das zweite Glied muß mitgenommen werden, obwohl $k_0 = 2\pi/\lambda$ mit wachsendem λ kleiner wird. Man würde sonst nämlich nur das (statische) Nahfeld der Dipole berücksichtigen. Dieses geht jedoch mit dem reziproken Quadrat des Abstandes von der Dipolwand gegen Null, während der Fernfeldanteil mit dem einfachen reziproken Abstand gegen Null geht. Schon im Abstand $\lambda/2\pi$ sind beide Anteile dem Betrag nach gleich.

Innerhalb der Platte ist $M_x^{(\text{de})}$ eine durch den Halbkugelradius a und das erregende Feld $H_x^{(\text{p})}$ vorgegebene Größe, dergegenüber in Gl. (16) das zweite Glied auf der linken Seite zum Verschwinden gebracht werden kann. Es muß nur $a/\lambda \ll 1$ sein, was aber bereits gefordert wurde. Aus

$$\Delta \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) = -\frac{4\pi N M_x^{(\text{de})}(x)}{d}, \quad -d/2 < z < d/2$$

folgt $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Pi_x^{*(\text{dw})} = - \frac{4 \pi N M_x^{(\text{de})}(x)}{d}$,

$$\int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) dV = - \int_V \frac{4 \pi N M_x^{(\text{de})}(x)}{d} dV,$$
$$\int_F \operatorname{grad} \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) dF = - \int 4 \pi N M_x^{(\text{de})}(x) dF.$$

Die Stärke der Platte sei so gering, daß die Mantelfläche des Prismas, über welchem integriert wird, keinen nennenswerten Beitrag liefert. Ferner sei der Querschnitt $|F|$ des Prismas so klein, daß man $\Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z)$ und $M_x^{(\text{de})}(x)$ bezüglich x als konstant ansehen darf. Dann folgt

$$2 \left[\operatorname{grad}_z \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) \right]_{z=0+} = - 4 \pi N M_x^{(\text{de})}(x),$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) \right]_{z=0+} = - 2 \pi N M_x^{(\text{de})}(x). \tag{18}$$

Eine weitere Beziehung für $\Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z)$ gewinnen wir mit Hilfe von Gl. (17), wenn wir in Gl. (5) $\Pi \equiv 0$ und $\Pi^* = e_1 \Pi_x^*$ setzen. Von Gl. (5) behält man dann

$$E_x = 0,$$
$$E_y = -j k_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\partial \Pi_x^*(x, z)}{\partial z},$$
$$E_z = 0.$$
$$H_x = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Pi_x^*(x, z)}{\partial z},$$
$$H_y = 0.$$
$$H_z = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Pi_x^*(x, z)$$

übrig. Daraus liefert die Gleichung für H_x mit $\Pi_x^*(x, z) = \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z)$ die gewünschte Beziehung

$$H_x^{(\text{dw})} = - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z). \tag{20}$$

Mit Hilfe von Gl. (13) und (20) formuliert man nun die Randbedingung (18) endgültig

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, y) \right]_{x=0+} =$$
$$= - 2 \pi \left(- \frac{1}{2} \right) \left[H_x^{(\text{p})}(x, z) + H_x^{(\text{dw})}(x, z) \right]_{z=0+} a^3 =$$
$$= \frac{1}{2} 2 \pi N a^3 \left[H_x^{(\text{p})}(x, z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) \right]_{z=0+} =$$
$$= \frac{1}{2} \sigma \left[2 \cos \alpha \frac{E^{(\text{einf})}}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} e^{-jk_0 x \sin \alpha} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) \right]_{z=0+}. \tag{21}$$

Man verwendete dabei die Abkürzung $2 \pi N a^3 = \sigma$. In Übereinstimmung mit Gl. (17) setzt man nun für $\Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z)$

$$\Pi_x^{*(\text{dw})}(x, z) = C e^{-jk_0 x \sin \alpha} e^{-jk_0 z \cos \alpha} \tag{22}$$

an und geht damit in Gl. (21) hinein. Für die Kon-

stante C erhält man

$$C = \frac{j 2 \sigma k_0 \cos \alpha \frac{E^{(\text{einf})}}{k_0^2 \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \cos \alpha}}{2 - j \sigma k_0 \cos \alpha}. \tag{23}$$

Der Hertzsche Vektor der Welle, die von der glatten, ideal leitenden xy -Ebene zurückgeworfen würde, heißt

$$\Pi_x^{*(\text{refl})}(x, z) = \frac{E^{(\text{einf})}}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} k_0^2 \cos \alpha} e^{-jk_0 x \sin \alpha} e^{-jk_0 z \cos \alpha}. \tag{24}$$

Man prüft das an Hand von Gl. (19) und (1) nach. Fällt also eine horizontal polarisierte, ebene Welle auf eine gleichmäßig dicht mit ideal leitenden Halbkugeln belegte, ideal leitende xy -Ebene, so ist die reflektierte Schwingung ebenfalls eine ebene Welle, die durch den Hertzschen Vektor

$$\Pi_x^{*(\text{gesamt})}(x, z) = \Pi_x^{*(\text{refl})} + \Pi_x^{*(\text{dw})} =$$
$$= \frac{E^{(\text{einf})}}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} k_0^2 \cos \alpha} e^{j 2 \arctan [(\sigma k_0 \cos \alpha)/2]} \cdot e^{-jk_0 x \sin \alpha} e^{-jk_0 z \cos \alpha} \tag{25}$$

beschrieben wird. Ihre Phase eilt gegenüber derjenigen Welle, die von der glatten Wand zurückgeworfen würde, um den Winkel

$$\delta = 2 \arctan [(\sigma k_0 \cos \alpha)/2] \approx$$
$$\approx 2 \cdot \frac{1}{2} 2 \pi N a^3 k_0 \cos \alpha = 2 \pi N a^3 k_0 \cos \alpha$$

voraus.

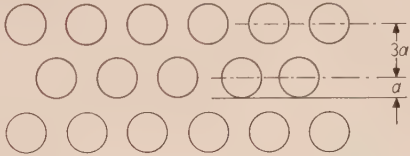


Bild 6. Anordnung von Halbkugeln in der xy -Ebene.

Um die Größe der Phasenvoreilung abschätzen zu können, verteilt man die Halbkugeln auf der xy -Ebene nach dem Schema von Bild 6. Jede Halbkugel beansprucht ein Quadrat mit der Seitenlänge $3a$. Damit wird $N = 1/(9a^2)$ und die Phasenvoreilung

$$\delta = (2 \pi/9) a k_0 \cos \alpha.$$

Nun läßt man die ebene Welle mit dem Einfallswinkel $\alpha = 0$, also senkrecht, auf die xy -Wand auf treffen, die man vorher nach dem Schema von Bild 6 aufgeraut hat. Die reflektierte Welle eilt infolge der Rauigkeit um den größtmöglichen Winkel, nämlich $(2 \pi/9) a k_0$ voraus. Die gleiche Wirkung hätte man erzielt, wenn man die ideal spiegelnde Fläche, anstatt sie mit Halbkugeln zu bestücken, um $(\pi/9) a$ angehoben hätte.

4. Einfluß der Wandrauhigkeit auf die H_{01} -Welle im runden Hohlleiter

Wenn die ebene Welle in Bild 1 an der unendlich gut leitenden xy -Ebene reflektiert wird, entsteht im Halbraum $0 < z$ eine Überlagerung zweier sich

kreuzender ebener Wellen. Dabei verschwindet in gewissen Ebenen $z = \text{const}$ die elektrische Feldstärke vollständig. In diese Knotenebenen kann man dünne metallische Wände einziehen, ohne daß der elektromagnetische Vorgang gestört wird. Ebenso kann man Blechwände in beliebigen Ebenen $y = \text{const}$ aufstellen. Materialisiert man zwei benachbarte Knotenebenen, so entsteht ein Rechteckhohlleiter mit einer H_{10} -Welle (in Bild 7 TE_{10} -Welle ge-

Nach BIOT [1] wird nämlich im Gegensatz zur horizontal polarisierten Welle eine vertikal polarisierte Welle unter gleichen Bedingungen wie oben bei streifendem Einfall bis zu 180° in der Phase gedreht.

Dieses Phänomen kommt für die H_{01} -Welle glücklicherweise nicht in Betracht und könnte für andere Wellentypen des runden Hohlleiters nur Bedeutung gewinnen, sofern sie erheblich über der Grenzfrequenz betrieben werden.

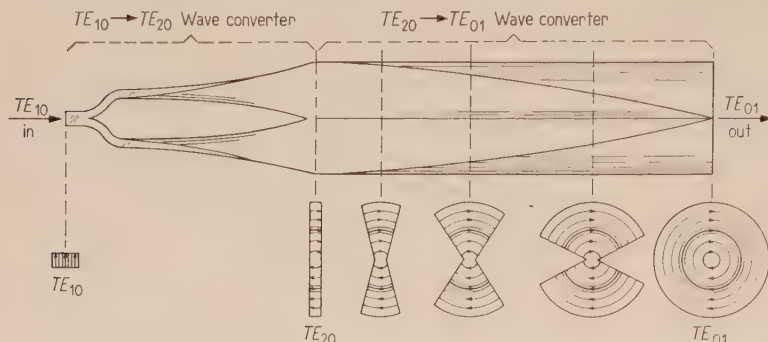


Bild 7. Die H_{10} -Welle (gleich TE_{10} -Welle im Bild) eines Rechteckhohlleiters wird in die H_{01} -Welle (gleich TE_{01} -Welle im Bild) eines runden Hohlleiters umgewandelt (aus G. C. SOUTHWORTH, Principles and applications of waveguide transmission, Bell Telephone Laboratories Series, D. van Nostrand Co., Inc., New York 1950).

nannt). Bei dem von links herangeführten Rechteckhohlleiter in Bild 7 entsprechen die senkrechten Wände den Knotenebenen. Sie können als Reflektoren für horizontal polarisierte ebene Wellen angesehen werden. Auf ihrem Weg durch den Konverter wird die ankommende H_{10} -Rechteckhohlleiter-Welle in eine H_{01} -Rundhohlleiter-Welle verwandelt. Die linke Knotenwand geht dabei in die Rundhohlleiterwand über, die rechte verliert sich in der Achse des Rundhohlleiters. Aus dieser Achse heraus strahlt also eine Welle, deren Front ein Kegelmantel ist. Sie löst an der zylindrischen Wand einen reflektierten Anteil — ebenfalls eine Kegelfrontwelle — aus, die sich in der Hohlleiterachse verliert. Nach wie vor wirkt die Wand des runden Hohlleiters als Reflektor für eine horizontal polarisierte Welle. Sie spielt also für die H_{01} -Rundhohlleiter-Welle die gleiche Rolle wie in den Abschnitten 2 und 3 die xy -Ebene für die einfallende und reflektierte, horizontal polarisierte, ebene Welle. Bild 8 gibt ein Beispiel dafür, wie sie nach allen Richtungen von Kratzern zerfurcht ist. In dem gezeigten Fall liegen deren Querabmessungen bei einem μm und darunter. Das ist der 6000. Teil der Wellenlänge $\lambda = 6 \text{ mm}$, die 50 GHz entspricht. Um die Wirkung der kreuz- und querlaufenden Kratzer abschätzen zu können, ersetzt man die raue Oberfläche durch eine glatte, die jedoch nach dem Schema von Bild 6 mit Halbkugeln bestückt wird, deren Radius gleich $1 \mu\text{m}$ ist. Aus dem Ergebnis des Abschnitts 3 schließt man, daß die Rauigkeit eine Durchmesseränderung von höchstens dem Bruchteil eines μm mit sich bringen kann, sich darüberhinaus jedoch nicht nachteilig auswirken wird. Die Toleranzen, die man mit erträglichem Aufwand bei der Herstellung und Verlegung von Hohlleitern erreicht, liegen um Vieles darüber.

Da die Unregelmäßigkeiten in der Oberfläche so klein gegen die in Frage kommenden Hohlleiterwellenlängen sind, hat man dieses Ergebnis erwartet. Mit Sicherheit ließ es sich jedoch nicht vorhersagen.

Wenn die Wand des Hohlleiters nicht mehr ideal leitet, verringert sich die Wirkung der Oberflächenrauigkeit sogar noch, weil die Forderung

$$E_{\text{tangential}} = 0 \quad \text{in der Wandung}$$

in dem Maß an Schärfe verliert, wie die äquivalente Leitschichtdicke zunimmt, die sekundären Dipole also schwächer werden können. Dagegen vermehrt die Rauigkeit die durch Stromverdrängung entstehenden Wandverluste. ALLISON und BENSON [4] und andere haben das theoretisch und experimentell ausgiebig untersucht.

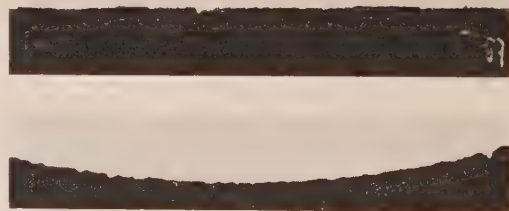


Bild 8. Runder Hohlleiter aus blank gezogenem Aluminiumrohr im Längs- und Querschnitt (500fache Vergrößerung, Aufnahmen: Forster-Meßautomatik, Bad Nauheim).

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit wurde von Herrn Professor Dr. H. BUCHHOLZ und Herrn Oberpostrat Dr. K. O. SCHMIDT gegeben, die auch die Durchführung ermöglichten. Beiden Herren gilt der besondere Dank des Verfassers.

Schrifttum

- [1] BIOT, M. A., Some new aspects of the reflection of electromagnetic waves on a rough surface. J. appl. Phys. **28** [1957], 1455 — 1463.
- [2] BIOT, M. A., On the reflection of electromagnetic waves on a rough surface. J. appl. Phys. **29** [1958], 998.
- [3] BRILLOUIN, L., Propagation d'ondes électromagnétiques dans un tuyau. Rev. Gén. Élect. **40** [1936], 227 — 239.
- [4] ALLISON, J. und BENSON, F. A., Waveguide surface finish and attenuation. Electron. Engrg. **28** [1956], 482 — 487.

BUCHBESPRECHUNGEN

Advances in electron tube techniques
(Proceedings of the 5th National conference, edited by
D. SLATER). Pergamon Press, Oxford 1961, 235 Seiten,
zahlr. Bilder, 22 cm \times 28 cm, Ganzleinen, £ 5.

Der Band enthält 44 Vorträge auf der 5. nationalen US-Konferenz über Technologie der Elektronenröhren, die im September 1960 stattfand. Auf diesen Konferenzen, die alle zwei Jahre abgehalten werden, kommen die Fortschritte und Erfahrungen der Zwischenzeit zur Sprache. Die Themen der im vorliegenden Band gesammelten Vorträge betreffen Werkstoffe (Metalle, Keramik usw.), Kathoden, Vakuum-Technik, Gas-Analysen mit Omegatrons, Getter-Materialien, Fragen der Alterung und der Stabilität gegen mechanische Erschütterung, letztere auch im Hinblick auf Verwendbarkeit in Raketen. Einige Titel seien genannt: S. R. STEELE berichtet über Dämpfungs-Materialien in Hochleistung-Mikrowellenröhren, H. A. STERN über Verwendung von Radioisotopen, W. B. NOTTINGHAM über Thermoelektronische Umwandlung von Wärme in Elektrizität, A. VENEMA über Vakuum-Technik in Europa. Den Einführungsvortrag hielt W. H. KOHL. Der bestens ausgestattete Band gibt einen guten Überblick über Stand und Probleme der Röhren-Technologie in den Vereinigten Staaten.

K. PÖSCHL

K. G. Budden, Radio waves in the ionosphere.
Cambridge University Press, 1961, XXIV, 542 Seiten,
zahlr. Bilder, 16 cm \times 23,5 cm, Ganzleinen, sh 95/—.

Das behandelte Gebiet ist sicher seit einiger Zeit reif für eine zusammenfassende Darstellung. K. BUDDEN, dem so tief-schürfende Originalarbeiten zu verdanken sind, ist hier noch einen Schritt weiter gegangen in Richtung auf ein Lehrbuch: die elementaren Grundlagen (Feldgrößen, Maxwellsche Gleichungen, Welle) werden im Kapitel 2 gelegt, dann werden die Problemkreise nach wachsender Schwierigkeit besprochen bis zum Schlußkapitel über die Reziprozität. Dazwischen bringen die wichtigsten Kapitel unter anderem eine zwar aufs Phänomenologische beschränkte, aber außergewöhnlich klare und übersichtliche Darstellung der konstituierenden Einflüsse im Plasma (Kapitel 3) und der daraus folgenden Dispersionsformel (Kapitel 5 und 6); die Fresnelschen Formeln im allgemeinen Fall (Kapitel 8); die (so häufig kritiklos benutzte) WKB-Näherung in stufenweiser Erklärung, mit Kontrolle auf ihre Brauchbarkeit (Kapitel 9); die Zusammenhänge zwischen Echolaufzeit (scheinbarer Höhe), Phasenlaufzeit (Phasenhöhe) und wahrer Reflexionshöhe (Kapitel 10); das schwierige Kapitel des Strahlenverlaufs im magnetisierten Plasma, sehr gründlich und genau dargestellt (Kapitel 11 bis 14); eine eingehende Diskussion des Phänomens der Wellenreflexion im inhomogenen Medium, behandelt am Beispiel einer linearen Höhenvariation der effektiven DK (Kapitel 15); exakte Lösungen der Wellengleichung für verschiedene Schichtprofile im nicht-magnetisierten Plasma (Kapitel 16 und 17); das schwierige Problem der Kopplung zwischen Hauptpolarisationen (Kapitel 18 und 19); die genäherte Berechnung des komplexen Reflexionskoeffizienten nach der Methode des Phasenintegrals.

Auch eine so klare und genaue Darstellung wie diese kann die Tatsache nicht aus der Welt schaffen, daß die Probleme der Ausbreitung im anisotropen, inhomogenen Medium zu den schwierigsten der mathematischen Physik gehören. Deshalb werden die letzten 12 Kapitel den Spezialisten des Gebiets besser zugänglich sein. Dagegen können die Kapitel 1 bis 11, gerade wegen ihres systematischen und klaren Aufbaus, vielen Nichtspezialisten einen soliden Zugang zur

Theorie der Ausbreitung öffnen. Die konsequente Formelschreibweise in allgemeinen, rationellen Einheiten — im Land des Autors noch so selten — ist für deutsche Leser ein weiterer Vorzug dieses gründlichen Buches.

Der mehr technisch orientierte Leser begegnet einigen wenigen, eventuell vermeidbaren Schwierigkeiten. Während er komplexe Größen zur Repräsentation von Zeigergrößen laufend benutzt, werden ihm komplexe Höhen oder Winkel schwer zugänglich sein. Die in Fig. 1012 dargestellte Impulsverformung beruht auf einem unrealistischen Schichtmodell und gibt den falschen Eindruck, das verformte Signal beginne schon vor dem unverformten.

Das Buch enthält eine Menge neu berechneter Figuren, die viel numerische Information enthalten und zur Abschätzung oft von Nutzen sein werden. Insofern sind auch die Ergebnisse der schwierigen Kapitel dem einfachen Leser zugänglich gemacht. BUDDEN's Buch darf ohne Übertreibung als Standardwerk bezeichnet werden, jeder Spezialist sollte es besitzen, viele Interessenten wird es zuverlässig bis zum jeweils gewünschten Niveau führen.

K. RAWER

G. J. Thaler und R. G. Brown, Analysis and design of feedback control systems; 2. Auflage.
McGraw-Hill Book Co., New York—Toronto—London
1960, XIII, 648 Seiten, 470 Bilder, 15,5 cm \times 23,5 cm,
Ganzleinen, £ 5 12 s 6 d.

Dieses Werk ist in erster Linie als Lehrbuch zur Einführung in die theoretischen Grundlagen und den praktischen Entwurf von Regelkreisen gedacht und vermittelt eine gut gegliederte und verständlich dargestellte Gesamtübersicht. Darüber hinaus erfahren verschiedene Sonderprobleme und praktische Beispiele eine vertiefte Behandlung, wobei Methoden und Erkenntnisse nach dem neuesten Stand berücksichtigt sind. Dieses Buch erscheint bereits in zweiter, stark überarbeiteter und erweiterter Auflage. Die erste Auflage aus dem Jahre 1953 trug den Titel „Servomechanism analysis“.

Das Buch umfaßt 14 Kapitel. In den Kapiteln 1 bis 5 werden Definitionen, die bekannten mathematischen Hilfsmittel und die Eigenschaften elementarer Regelkreise behandelt. Unter anderem wird eine knappe Einführung in die Laplace-sche Transformation gegeben (21 S.). Sehr nützlich ist eine umfangreiche Übersicht (50 S.) über das physikalische Verhalten mechanischer und elektrischer Systeme, deren mathematische Gleichungen jeweils in Rechenschaltungen von Analogrechnern übersetzt werden. Eine ausführliche Behandlung (68 S.) erfahren das Übergangsverhalten und die Übertragungsfunktionen von Systemen zweiter Ordnung. — Die Kapitel 6 und 7 (zusammen 100 S.) befassen sich mit den verschiedenen graphischen Methoden zur Darstellung und Behandlung von Übertragungsfunktionen, z. B. Ortskurvendarstellung, Bode- und Nichols-Diagramme und komplexe Frequenzebene. Die relativen Vor- und Nachteile dieser Methoden bei verschiedenen Anwendungen werden einander gegenübergestellt, und es wird eine Anleitung zur Analyse von Regelkreisen aus den Gleichungen und Ortskurven der Übertragungsfunktionen gegeben. — Die Kapitel 8 und 9 sind dem praktischen Entwurf von Regelkreisen gewidmet. Dabei wird gezeigt, daß die Anwendung der in den vorangegangenen Kapiteln beschriebenen Methoden allein nicht ausreicht. Auf die in der Praxis zusätzlich zu berücksichtigenden Nebeneffekte und Forderungen wird an Hand einiger typischer Beispiele eingegangen. — Im 10. Kapitel (45 S.) wird eine bemerkenswerte neuartige Methode zur Analyse und Synthese von Regelkreisen höherer Ordnung nach MITROVIC vorgestellt;

damit hergeleitete Diagramme für Systeme dritter Ordnung sind wiedergegeben. — Kapitel 11 (44 S.) behandelt einschleifige Regelkreise, in denen mit getasteten Führungs-, Regel- und Stellgrößen operiert wird. Eine Theorie für regellose Vorgänge wird nicht dargeboten. — Die letzten drei Kapitel befassen sich mit den Problemen der nichtlinearen Systeme. — In einem 112seitigen Anhang werden einige Bestandteile von Regelkreisen wie z. B. Meßorgane, Regelgeber, Stellglieder, Servomotore und Integratoren beschrieben.

Dieses Buch zeichnet sich besonders durch die systematische Darstellung des Stoffes aus. Die engen Beziehungen, die es sowohl zur Theorie als auch zur Praxis hat, machen es zu einem wertvollen Unterrichts- und Nachschlagewerk für Nachrichten- und Regelungstechniker.

S. W. WAGNER

H. Schlitt, Systemtheorie für regellose Vorgänge; Statistische Verfahren für Nachrichtentechnik. Springer-Verlag, Berlin 1960, XII, 344 Seiten, 167 Bilder, 1 Tafel, 16,0 cm × 23,5 cm, Ganzleinen, DM 49,50.

Der Autor hat sich die Aufgabe gestellt, die Theorie der Übertragungssysteme für den Fall darzustellen, daß die Eingangssignale statistischen Charakter haben, d. h. Zufallsvariable sind.

Dazu werden im ersten Teil die nötigen wahrscheinlichkeitstheoretischen Mittel sehr ausführlich und in einer auch dem Nichtmathematiker verständlichen Form eingeführt und an Hand zahlreicher Beispiele erläutert. Insbesondere werden die für die Anwendung wichtigen Transformationen von Zufallsvariablen wirklich durchgeführt.

Nach Einführung von Korrelationsfunktion und Leistungsspektrum wird der Zusammenhang zwischen diesen Kenngrößen der Eingangs- und Ausgangssignale beschrieben.

Der letzte Teil ist der Filtertheorie, vor allem der Synthese optimaler Übertragungssysteme gewidmet.

Für den in der Nachrichtentechnik arbeitenden Praktiker bedeutet das Buch zweifellos eine wertvolle Hilfe.

Dem Verfasser sind bei der Darstellung der Grundlagen der mathematischen Statistik leider einige die Gaußsche Verteilung betreffende unrichtige Formulierungen unterlaufen, die bei einer weiteren Auflage des Buches vermieden werden könnten.

So ist (S. 21) die Gaußsche Verteilungsfunktion keine Ausnahme zu der Regel, daß man die Verteilungsdichte kennt, wenn man alle Momente der Verteilung zur Verfügung hat. Sie ist durch Vorgabe von Mittelwerten und Streuung auch nur dann eindeutig bestimmt, wenn man die analytische Form der Normalverteilung voraussetzt. Das Gegenbeispiel der

Gleichverteilung zeigt, daß die Gauß-Verteilung nicht die einzige durch zwei statistische Kenngrößen eindeutig bestimmte Verteilung ist (S. 31). Von den für das Eintreten einer Normalverteilung als hinreichend bezeichneten Voraussetzungen a) bis c) (S. 25) sind a) und c) zwar notwendig, aber nicht hinreichend, während b) bei einer Normalverteilung nicht erfüllt ist.

Die Definition der Wahrscheinlichkeit nach v. Mises als Grenzwert der relativen Häufigkeit scheint dem Praktiker zwar zunächst einleuchtend, führt aber bekanntlich zu unüberwindbaren Widersprüchen. Die axiomatische Einführung der Wahrscheinlichkeit als Maß (etwa wie bei VAN DER WAERDEN: Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin 1957) dürfte daher vorzuziehen sein.

H. STÖRMER

A. Kratzer und W. Franz, Transzendente Funktionen. Akad. Verlagsges., Leipzig 1960, XIII, 375 Seiten, 58 Bilder, 17,5 cm × 23,5 cm, Ganzleinen, DM 39,—.

Ausgehend von der Riemannschen Differentialgleichung entwickeln die Verfasser die für die Anwendung wichtigen besonderen Lösungsfunktionen; diese sind die Lösungsfunktionen der hypergeometrischen und der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung; für den Physiker und Ingenieur besonders interessant, weil die speziellen Formen der Lösungen der Wellengleichung Sonderfälle der hypergeometrischen und der konfluenten hypergeometrischen Gleichung sind. Das Buch bringt daher auch in seinen Hauptteilen weitgehende Ausführungen über die allgemeine hypergeometrische Funktion, die Kugelfunktionen, die konfluente hypergeometrische Funktion und die Zylinderfunktionen. Die Eigenschaften aller dieser Funktionen werden aus den Integraldarstellungen und ihrem Verhalten auf der Riemannschen Fläche gewonnen.

Beim aufmerksamen Studium des Buches merkt man, mit wie großem Geschick die Verfasser ihre Absicht durchgeführt haben, nicht nur das Verständnis für die entwickelten Formeln zu vermitteln, sondern darüber hinaus auch dem Leser die Anregung zu geben, sich weitgehend mit den aufgeworfenen Problemen zu befassen und vielleicht die eine oder andere Beziehung selbst zu entwickeln; und für diese Haltung des Buches wird jeder Leser dankbar sein. Besonders soll aber hervorgehoben werden, daß in diesem Buch endlich einmal alle Fragen, die die Nullstellen bei Zylinderfunktionen betreffen, in etwas breiterer Weise behandelt werden.

Ein ausführliches Namens- und Sachregister erleichtert die Benutzung des Buches, das jedem Physiker und Ingenieur empfohlen werden kann.

A. THOMA

Mitarbeiter dieses Heftes:

Ing. G.-G. Gaßmann, i. H. Standard Elektrik Lorenz AG, Röhrenwerk, Eßlingen, F.-Müller-Straße 26; Dr. K.-B. Niclas, i. H. Telefunken GmbH., Röhrenentwicklung, Ulm (Donau), Söflinger Straße 100; Dr. K. Pöschl, i. H. Siemens & Halske AG, Röhrenfabrik, München 8, St.-Martin-Straße 76; Prof. Dr. K. Rawer, Ionosphären-Institut, Freiburg/Breisgau; Dr. W. Riedler, im Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Hochschule, Wien IV/50, Gußhausstraße 25; Dr. H. Störmer, i. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Prof. Dr. M. J. O. Strutt, Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenöss. Technischen Hochschule, Zürich 7, Gloriastraße 35; Dipl.-Ing. S. W. Wagner, Karlsruhe, Holderweg 6; Dipl.-Ing. R. Willett, im Institut für theoretische Elektrotechnik der Technischen Hochschule, Darmstadt, Schloßgartenstraße 2.

Alle Rechte, auch die der photomechanischen Wiedergabe, sind vorbehalten, jedoch wird gewerblichen Unternehmen die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung (Photokopie, Mikrokopie) von Beiträgen oder Beitragsteilen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens gegen Bezahlung der dort vorgesehenen Gebühren an die Inkassostelle für Photokopiergebühren beim Börsenverein des Deutschen Buchhandels, Frankfurt am Main, gestattet. Werden die Gebühren durch Wertmarken der Inkassostelle entrichtet, so ist für jedes Photokopierblatt eine Marke im Betrag von —,30 DM zu verwenden.

Im Oktober 1961 wird erscheinen:

Aufnahme und Verarbeitung von Nachrichten durch Organismen

Vorträge aus dem Gebiet der Kybernetik,
gehalten auf der NTG-Fachtagung in Karlsruhe am 11. und 12. April 1961

VERANSTALTER:

Fachausschuß 1 „Informations- und Systemtheorie“ der Nachrichtentechnischen Gesellschaft im VDE

- H. Marko*, Stuttgart: Einführung.
R. Feldtkeller, Stuttgart: Wechselbeziehungen zwischen Psychologie, Physiologie und Nachrichtentechnik.
K. Kumpf Müller, Darmstadt: Die nachrichtenverarbeitenden Funktionen der Nervenzellen.
W. Keidel, Erlangen: Codierung, Signalleitung und Decodierung in der Sinnesphysiologie.
J. Schouten, Eindhoven: Der Reaktionsablauf beim Menschen.
H. Scholl, Stuttgart: Trägheitserscheinungen beim Gehör.
B. Cramer, Darmstadt: Über das Erkennen von Sprachlauten.
F. Wenzel, Darmstadt: Über das Erkennen von Schrift.
W. Ernsthausen, Karlsruhe: Demonstrationsversuche zur Entstehung und Leitung von Nervenimpulsen.
J. Schwartzkopf, München: Die Übertragung akustischer Information durch Nerventätigkeit nach dem Salvenprinzip.
G. Baumgartner, Freiburg: Neuronale Grundlagen der optischen Kontrastverschärfung und die Signalübermittlung vom Auge zur Hirnrinde.
W. Reichardt, Tübingen: Die Verarbeitung optischer Nachrichten im Zentralnervensystem von Insekten.
E. Bünning, Tübingen: Zeitmessung bei Pflanzen und Tieren mit tagesperiodischen Schwingungen.
H. Mittelstaedt, Seewiesen: Die Regelungstheorie als methodisches Werkzeug der Verhaltensanalyse.
G. Vossius, Frankfurt: Die Regelbewegungen des Auges.
A. Andrew, Teddington: An Electrophysiological Investigation of Learning in the Earthworm.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

**WERNER
HEISENBERG**

PHYSIK UND PHILOSOPHIE

201 Seiten, 8°
Ganzleinen DM 10,—

Heisenberg läßt die Tatsachen sprechen und uns daran teilnehmen, was sie in physikalischer Betrachtung philosophisch aussagen. Er verabsolutiert nicht und bleibt stets kritisch um der wissenschaftlichen Forschung willen, die auf der Suche nach neuen Erkenntnissen ist, die alte Wahrheiten besser verstehen oder Einsicht in neue Wahrheiten geben können.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

ADOLF WIRK

PHILOSOPHIE UND PHYSIK

180 Seiten, 8°
Ganzleinen DM 14,40

Das Buch bildet, wie der Verfasser selbst sagt, ein philosophisches Komplement zu W. Heisenbergs „Physik und Philosophie“. Dem Philosophen will es den notwendigen Anschluß an die neuen Erkenntnisse der Physik ermöglichen, dem Physiker eine langentbehrte philosophische Fundierung seiner Probleme geben. Beiden gemeinsam ist ja das Streben nach Erkenntnis, die sich als allgemeinverbindlich denknotwendig erweist, also als unabhängig vom einzelnen erkennenden Menschen.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

